

ПОДПРОГРАММА G5U1R

Назначение

Генерация массива псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0,1)

Математическое описание

Псевдослучайные числа $R(J)$ получаются по следующим рекуррентным формулам:

$K_0 = \text{ISEED}$, где ISEED - некоторое целое начальное значение из отрезка [1, 2147483648].

$$K_J = 7^5 * K_{J-1} \pmod{2^{31} - 1}, \quad 1 \leq J \leq N$$

$$R(J) = K_J * 2^{-31}, \quad 1 \leq J \leq N$$

$$\text{ISEED} = K_N$$

Д. КНУТ. Искусство программирование для ЭВМ, Т. 2, "МИР", М, 1977, стр. 22-51.

Использование

SUBROUTINE G5U1R(ISEED, N, R)

Параметры

ISEED - любая целая переменная из отрезка [1, 2147483648]

N - заданное количество генерируемых псевдослучайных чисел (тип: целый)

R - вещественный массив длины N, содержащий вычисленные псевдослучайные числа.

Версии

G5U2R - генерация одного псевдослучайного числа, равномерно распределенного в интервале (0,1)

G5U2R является подпрограммой функцией и имеет заголовок

REAL FUNCTION G5U2R(ISEED)

Пример.

DIMENSION R(3)

ISEED=1234567

N=3

CALL G5U1R(ISEED, N, R)

ПОДПРОГРАММА G5R1R

Назначение

Генерация координат псевдослучайных точек, равномерно распределенных на поверхности трехмерной и четырехмерной единичной сферы.

Математическое описание

1. Случай трехмерной сферы.

Пусть α_1, α_2 - две независимые псевдослучайные величины, равномерно распределенные в интервале (0,1) и такие, что

$$S = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq 1.$$

Тогда искомые координаты определяются формулами:

$$Z_1 = 2 * \alpha_1 * \sqrt{1-S}, \quad Z_2 = 2 * \alpha_2 * \sqrt{1-S}, \quad Z_3 = 1 - 2 * S.$$

2. Случай четырехмерной сферы.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ - независимые псевдослучайные величины, равномерно распределенные в интервале (0,1) и

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = S_1 \leq 1, \quad \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = S_2 \leq 1.$$

Тогда искомые координаты равны

$$Z_1 = \alpha_1, \quad Z_2 = \alpha_2, \quad Z_3 = \alpha_3 * \sqrt{(1-S_1)/S_2}, \quad Z_4 = \alpha_4 * \sqrt{(1-S_1)/S_2}.$$

MARSAGLIA G. "Choosing a point from the surface of a sphere". The Annals of Mathematical Statistics, 3(2), 1972, 645-646.

Использование

SUBROUTINE G5R1R(ISEED, N, IOPT, Z)

Параметры

ISEED - любая целая переменная из отрезка [1, 2147483648]

N - заданное количество генерируемых псевдослучайных точек (тип: целый)

IOPT - определяет размерность сферы: IOPT=3 для генерации случайных точек на поверхности трехмерной сферы и IOPT=4 - для четырехмерной сферы (тип: целый)

Z - вещественный массив размерности N * IOPT, содержащий вычисленные координаты псевдослучайных точек.

Пример.

DIMENSION Z(1,3)

ISEED=1234567

N=2

IOPT=3

CALL G5R1R(ISEED, N, IOPT, Z)

ПОДПРОГРАММА GBU1R

Назначение

Генерация массива псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0,1)

Математическое описание

Псевдослучайные числа R(J) получаются по следующим рекуррентным формулам:

$K_0 = \text{ISEED}$, где ISEED - некоторое целое начальное значение на отрезке [1, 2147483646].

$$K_j = 7^5 * K_{j-1} \pmod{2^{31} - 1}, \quad 1 \leq j \leq N$$

$$R(J) = K_j * 2^{-31}, \quad 1 \leq J \leq N$$

$$\text{ISEED} = K_N$$

Д. КНУТ. Искусство программирование для ЭВМ, Т. 2, " Мир ", М, 1977, стр. 22-51.

Использование

SUBROUTINE GBU1R(ISEED, N, R)

Параметры

ISEED - любая целая переменная на отрезке [1, 2147483646]

N - заданное количество генерируемых псевдослучайных чисел (тип: целый)

R - вещественный массив длины N, содержащий вычисленные псевдослучайные числа.

Версии

GBU2R - генерация одного псевдослучайного числа, равномерно распределенного в интервале (0,1)

GBU2R является подпрограммой функцией и имеет заголовок

REAL FUNCTION GBU2R(ISEED)

Пример.

DIMENSION R(3)

ISEED=1234567

N=3

CALL GBU1R(ISEED, N, R)

ПОДПРОГРАММА GSR1R

Назначение

Генерация координат псевдослучайных точек, равномерно распределенных на поверхности трехмерной и четырехмерной единичной сферы.

Математическое описание

1. Случай трехмерной сферы.

Пусть α_1, α_2 - две независимые псевдослучайные величины, равномерно распределенные в интервале (0,1) и такие, что $S = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq 1$.

Тогда искомые координаты определяются формулами:

$$Z_1 = 2 * \alpha_1 \sqrt{1-S}, \quad Z_2 = 2 * \alpha_2 \sqrt{1-S}, \quad Z_3 = 1 - 2 * S.$$

2. Случай четырехмерной сферы.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ - независимые псевдослучайные величины, равномерно распределенные в интервале (0,1) и

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = S_1 \leq 1, \quad \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = S_2 \leq 1.$$

Тогда искомые координаты равны

$$Z_1 = \alpha_1, \quad Z_2 = \alpha_2, \quad Z_3 = \alpha_3 \cdot \sqrt{(1-S_1)/S_2}, \quad Z_4 = \alpha_4 \cdot \sqrt{(1-S_1)/S_2}.$$

MARSAGLIA G. " Choosing a point from the surface of a sphere". The Annals of Mathematical Statistics, 3(2), 1972, 645-646.

Использование

SUBROUTINE GSR1R(ISEED, N, IOPT, Z)

Параметры

ISEED - любая целая переменная на отрезке [1, 2147483646]

N - заданное количество генерируемых псевдослучайных точек (тип: целый)

IOPT - определяет размерность сферы: IOPT=3 для генерации случайных точек на поверхности трехмерной сферы и IOPT=4 - для четырехмерной сферы (тип: целый)

Z - вещественный массив размерности N * IOPT, содержащий вычисленные координаты псевдослучайных точек.

Пример.

DIMENSION Z(1,3)

ISEED=1234567

N=2

IOPT=3

CALL GSR1R(ISEED, N, IOPT, Z)

ОТВЕТЫ :

1. $r(k) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$

2. $r(k) = \frac{\lambda}{k+1}$

3. $r(k) = 1-p$

4. $r(k) = \frac{(n_2-k)(l-k)}{(k+1)(n-n_2-l+1+k)}$

5. $F(x) = 1 - e^{-bx}, \quad \xi = -b^{-1} \ln \alpha$

6. $\xi = -\frac{1}{a} \ln(1-\alpha) = -\frac{1}{a} \ln(\alpha)$

7. $\xi = a + \alpha(b-a)$

9. Указание: показать, что

a) $p(x) \geq 0, \quad x \in (0, \pi),$

б) $\int_0^{\pi/2} p(x) dx = 1$

10. Указание: 1) построить графики функций

$p_1(x) = 2/\pi, \quad p_2(x) = 8x/\pi^2, \quad p_3(x) = 24x^2/\pi^3,$

$f(x) = \sin(x), \quad x \in (0, \pi/2).$

2) используя формулу (16) вычислить дисперсии для всех $p_i(x), i=1,2,3$ с одинаковыми N .

ГЕНЕРАТОРЫ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ И МАССИВОВ

Подпрограмма URAND(IY)

REAL FUNCTION URAND(IY)

INTEGER IY

INTEGER IA, IC, ITWO, M2, M, MIC

DOUBLE PRECISION HALFM

REAL S

DOUBLE PRECISION DATAN, DSQRT

DATA M2/0/, ITWO/2/

IF(M2.NE.0) GO TO 90

M=1

80 M2=M

M=ITWO*M2

IF(M.GT.M2) GO TO 80

HALFM=M2

IA=8*IDINT(HALFM*DATAN(1.D0)/8.D0)+5

IC=2*IDINT(HALFM*(0.5D0-DSQRT(3.D0)/6.D0))+1

MIC=(M2-IC)+M2

S=0.5/HALFM

90 IY=IY*IA

IF(IY.GT.MIC) IY=(IY-M2)-M2

IY=IY+IC

IF(IY/2.GT.M2) IY=(IY-M2)-M2

IF(IY.LT.0) IY=(IY+M2)+M2

URAND=FLOAT(IY)*S

RETURN

END

Пример.

IY=0

R=URAND(IY)

вылетит, испытав хотя бы одно столкновение.

Переходная плотность для цепи столкновений определяется формулой

$$k(y, x) = q e^{-(x-y)}, \quad y \leq x \leq H.$$

Плотность первичных столкновений $f(x) = e^{-x}$, ($0 \leq x \leq H$). Следовательно, суммарная плотность столкновений $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = q \int_0^x e^{-(x-y)} \varphi(y) dy + e^{-x}.$$

Легко проверить, что здесь $\|K\| < q$. Известно, что в данном случае искомая вероятность $P = \varphi(H)$. Таким образом, требуется вычислить решение интегрального уравнения в одной точке $x = H$. Для этого можно использовать локальную оценку, положив $h(x) = k(x, H) = q \cdot e^{-(H-x)}$, т.е. $P = M \xi$, где $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} h(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} q \cdot e^{-(H-x_n)}$, если реализуется прямое моделирование цепи столкновений. Непосредственной подстановкой в уравнение можно убедиться, что здесь

$$\varphi(x) = e^{-(1-q)x}, \quad 0 \leq x \leq H.$$

Отсюда получим

$$P = \varphi(H) = (\varphi, h) = e^{-(1-q)H} (1 - e^{-qH}).$$

Сопряженное уравнение в данном случае имеет вид

$$\varphi^*(x) = q \int_x^H e^{-(y-x)} \varphi^*(y) dy + q \cdot e^{-(H-x)}$$

Ему удовлетворяет функция

$$\varphi^*(x) = q e^{-(1-q)(H-x)}$$

Дисперсия случайной оценки ξ определяется равенством

$$M \xi^2 = (\varphi, h(2\varphi^* - h)) = q^2 \frac{1+2q}{1+q} e^{-(1-q)H} - 2q^2 e^{-H} + \frac{q^2 e^{-2H}}{1+q}.$$

Рассмотрим теперь оценку по поглощениям

$$\eta = \frac{h(x_N)}{g(x_N)} = \frac{q e^{-(H-x_N)}}{1-q + q e^{-(H-x_N)}}$$

Для нее

$$M \eta^2 = (\varphi, \frac{h^2}{g}) = q^2 e^{-(1-q)H} \int_0^H \frac{e^{-(1+q)x}}{1-q + q e^{-x}} dx.$$

В данном случае можно рассматривать еще двоичную оценку ξ_1 которая равна 1, если частица вылетела, и равна 0 в противном случае. Очевидно, что

$$M \xi_1^2 = M \xi_1 = P = e^{-(1-q)H} (1 - e^{-qH}).$$

Для сравнения дисперсий оценок при большом H достаточно рассмотреть соответствующие коэффициенты при функции $e^{-(1-q)H}$, т.е. величины

$$C_{\xi} = q^2 \frac{1+2q}{1+q}, \quad C_{\eta} = q^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-(1+q)x}}{1-q + q e^{-x}} dx,$$

$$C_{\xi_1} = 1.$$

Задача. Сравнить значения коэффициентов C_{ξ} , C_{η} , C_{ξ_1} при $q = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$. Исследовать точности оценок.

которая является несмещенной (то есть $M_h \eta = I_h$), если $g(x) \neq 0$ при $h(x) \neq 0$.

$$D\eta = \left(X, \frac{h^2}{g} \right) - I_h^2,$$

где X определяется так же, как в (I2).

4. "Идеальная" цепь Маркова определяется функциями

$$q(x) = \frac{f(x)\varphi^*(x)}{(f, \varphi^*)}, \quad p(y, x) = \frac{k(y, x)\varphi^*(x)}{\varphi^*(y)}$$

Для этой цепи должны быть $k(y, x) \geq 0, f(x) \geq 0, h(x) \geq 0$. "Идеальная" оценка имеет нулевую дисперсию.

Оценка типа ξ с нулевой дисперсией.

Предположим, что функции $k(y, x), f(x), h(x)$ неотрицательны и $[k^*\varphi^*](x) = \varphi^*(x) - h(x) > 0$ для любого $x \in \Omega$.

Теорема 2. Если

$$q(x) = \frac{f(x)\varphi^*(x)}{(f, \varphi^*)}, \quad p(y, x) = \frac{k(y, x)\varphi^*(x)}{[k^*\varphi^*](y)}, \quad (I3)$$

то $D\xi = 0, M\xi = I_h$.

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [I].

Функция $\varphi^*(x)$ называется функцией ценности на основании выражения (II). Поэтому алгоритмы метода Монте-Карло, близкие к рассмотренному идеальному, принято называть моделированием по ценности.

Но отметим, что реализации оценки с нулевой дисперсией невозможно по следующим причинам:

1) Функция φ^* неизвестна. 2) вследствие того, что $g \equiv 0$ необходимо моделировать бесконечные цепочки. Поэтому на практике используют приближенное моделирование

по ценности, основанное на замене в характеристиках цепи (I3) функции φ^* на функцию $\rho \approx \varphi^*$ (замечательным свойством получаемого алгоритма является его независимость от постоянного множителя функции ρ). Кроме того, начиная с m -го состояния вводят поглощение с вероятностью, обеспечивающей обрыв траектории с вероятностью 1. Можно получить оценку величины $D\xi$ при следующих предположениях:

$$\rho = c(1+\varepsilon)\varphi^*, \quad |\varepsilon(x)| \leq \delta < 1, \quad \text{где } c = \text{const},$$

$$g(x) \leq \delta_g, \quad g(x) = 0 \quad \text{при } h \leq m,$$

$$q' = \|K\| \frac{1+\delta}{(1-\delta)(1-\delta_g)} < 1. \quad \text{Тогда}$$

$$D\xi = \frac{2I_h \|f\| \|\varphi^*\| (1+\delta)^2}{1-q'} \left(\left(\frac{2\delta}{1-\delta} + \frac{\delta_g}{1-\delta_g} \cdot \frac{1+\delta}{1-\delta} \right) \cdot \frac{1+q}{1-q} + \delta_g \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^2 \cdot \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \cdot q \right)^m \right), \quad q = \|K\|.$$

Отметим, что трудоемкость методов Монте-Карло определяется величиной $S = t \cdot D\xi$, где t - среднее время расчетов на ЭВМ для получения одного выборочного значения ξ .

Пример решения интегрального уравнения методом Монте-Карло.

Для исследования эффективности различных модификаций моделирования процесса переноса излучения с сильно анизотропным рассеянием можно использовать следующую модель процесса. Частица движется из точки $x=0$ вдоль оси x случайными пробегами, распределенными с плотностью $e^{-\alpha x}$ ($x > 0$). В конце пробега происходит столкновение, в результате которого частица может проглотиться с вероятностью $1-q$; в противном случае она движется дальше. В точке $x=N$ происходит вылет, то есть обрыв траектории. Требуется вычислить вероятность P того, что частица

которая является несмещенной (то есть $M_h \eta = I_h$), если $g(x) \neq 0$ при $h(x) \neq 0$.

$$D\eta = \left(X, \frac{h^2}{g} \right) - I_h^2,$$

где X определяется так же, как в (I2).

4. "Идеальная" цепь Маркова определяется функциями

$$p(x) = \frac{f(x)\varphi^*(x)}{(f, \varphi^*)}, \quad p(y, x) = \frac{k(y, x)\varphi^*(x)}{\varphi^*(y)}$$

Для этой цепи должны быть $k(y, x) \geq 0$, $f(x) \geq 0$, $h(x) \geq 0$. "Идеальная" оценка имеет нулевую дисперсию.

Оценка типа ξ с нулевой дисперсией.

Предположим, что функции $k(y, x)$, $f(x)$, $h(x)$ неотрицательны и $[k^* \varphi^*](x) = \varphi^*(x) - h(x) > 0$ для любого $x \in \Omega$.

Теорема 2. Если

$$p(x) = \frac{f(x)\varphi^*(x)}{(f, \varphi^*)}, \quad p(y, x) = \frac{k(y, x)\varphi^*(x)}{[k^* \varphi^*](y)}, \quad (I3)$$

то $D\xi = 0$, $M\xi = I_h$.

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [I].

Функцию $\varphi^*(x)$ называют функцией ценности на основании выражения (II). Поэтому алгоритмы метода Монте-Карло, близкие к рассмотренному идеальному, принято называть моделированием по ценности.

Но отметим, что реализации оценки с нулевой дисперсией невозможно по следующим причинам:

1) Функция φ^* неизвестна. 2) вследствие того, что $g \equiv 0$ необходимо моделировать бесконечные цепочки. Поэтому на практике используют приближенное моделирование

по ценности, основанное на замене в характеристиках цепи (I3) функции φ^* на функцию $\rho \approx \varphi^*$ (замечательным свойством получаемого алгоритма является его независимость от постоянного множителя функции ρ). Кроме того, начиная с m -го состояния вводят поглощение с вероятностью, обеспечивающей обрыв траектории с вероятностью 1. Можно получить оценку величины $D\xi$ при следующих предположениях:

$$\rho = c(1+\varepsilon)\varphi^*, \quad |\varepsilon(x)| \leq \delta < 1, \quad \text{где } c = \text{const},$$

$$g(x) \leq \delta_g, \quad g(x) = 0 \quad \text{при } h \leq m,$$

$$q' = \|K\| \frac{1+\delta}{(1-\delta)(1-\delta_g)} < 1. \quad \text{Тогда}$$

$$D\xi = \frac{2I_h \|f\| \|\varphi^*\| (1+\delta)^2}{1-q'} \left(\left(\frac{2\delta}{1-\delta} + \frac{\delta_g}{1-\delta_g} \cdot \frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^m \right)^2$$

$$\times \frac{1+q}{1-q} + \delta_g \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^2 \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \cdot q \right)^m, \quad q = \|K\|.$$

Отметим, что трудоемкость методов Монте-Карло определяется величиной $S = t \cdot D\xi$, где t - среднее время расчетов на ЭВМ для получения одного выборочного значения ξ .

Пример решения интегрального уравнения методом Монте-Карло.

Для исследования эффективности различных модификаций моделирования процесса переноса излучения с сильно анизотропным рассеянием можно использовать следующую модель процесса. Частица движется из точки $x=0$ вдоль оси x случайными пробегами, распределенными с плотностью e^{-x} ($x > 0$). В конце пробега происходит столкновение, в результате которого частица может проглотиться с вероятностью $1-q$; в противном случае она движется дальше. В точке $x=H$ происходит вылет, то есть обрыв траектории. Требуется вычислить вероятность P того, что частица

которое дает возможность оценить методом Монте-Карло решение сопряженного уравнения в заданной точке. Равенство (II) можно строго доказать (аналогично доказательству теоремы), используя разложение φ^* в ряд Неймана:

$$\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} (K^*)^n h.$$

Выражение (II) используется в теории методов Монте-Карло для вычисления дисперсии оценок и построения оценок нелинейных функционалов вида $(\varphi, \varphi^* \chi)$, в частности, функционалов теории возмущений.

Дисперсия основной оценки.

Для неотрицательных $f(x)$, $h(x)$, $k(y, x)$ имеет место следующее выражение дисперсии основной оценки:

$$D_{\xi} = (\chi, h(2\varphi^* - h)) - I_h^2, \quad (I2)$$

где χ - ряд Неймана для уравнения

$$\psi(x) = \int_{\Omega_1} \frac{k^2(y, x) \psi(y)}{\rho(y, x)} dy + \frac{f^2(x)}{g(x)}.$$

Если ряд расходится, то указанная дисперсия бесконечна. Выражение (I2) нетрудно получить путем соответствующего объединения членов двойной суммы, выражающей ξ^2 , и повторного осреднения этих членов с учетом (II). Таким образом справедливо утверждение:

Если выполняются условия (7), $\|K_1\| < 1$ при некотором l , $D_{\xi_1} < +\infty$, то дисперсия выражается формулой (I2).

Замечания.

I. Оценку решения в заданной точке можно получить на основе выражения

$$\varphi(x) = f(x) + M \sum_{n=0}^N Q_n^* f(x_n),$$

рассматривая исходное уравнение как сопряженное к $\varphi^* = K^* \varphi^* + h$. Однако не всегда удастся подобрать удобную цепь Маркова для сопряженного уравнения; кроме того, последнее соотношение позволяет оценить $\varphi(x)$ только в одной точке. Для построения более эффективной локальной оценки достаточно записать интегральное уравнение $\varphi = K\varphi + f$ следующим образом:

$$\varphi(x) = (\varphi, h_x) + f(x),$$

где $h_x(y) = k(y, x)$. Отсюда

$$\varphi(x) = M \sum_{n=0}^N Q_n k(x_n, x) + f(x)$$

Это выражение дает возможность оценить $\varphi(x)$ сразу в нескольких точках. Локальные оценки для задач теории переноса были предложены и разработаны советскими и американскими учеными.

2. Если $f(x) \geq 0$, $\int_{\Omega} f(x) dx = 1$, $k(y, x) \geq 0$, $\int_{\Omega} k(x, y) dy \leq 1$ то, полагая $\chi(x) = f(x)$, $\rho(y, x) = k(y, x)$ получаем $Q_n = 1$ ($n = 0, 1, \dots$), $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} h(x_n)$.

Ядра такого типа называются субстохастическими. Они появляются, когда в основе задачи лежит марковская цепь, например, цепь столкновений частицы с веществом. Последний алгоритм представляет собой прямое моделирование цепи.

Дисперсии оценок прямого моделирования всегда конечны, так как в этом случае $\chi = \varphi$.

3. Оценка по поглощениям

$$\eta = \frac{Q_n k(x_n)}{g(x_n)},$$

$$M(\Delta_n, Q_n, h(x_n)) = M_{(x_0, \dots, x_n)} M(\Delta_n Q_n h(x_n) | x_0, \dots, x_n) =$$

$$= M_{(x_0, \dots, x_n)} (Q_n h(x_n) M(\Delta_n | x_0, \dots, x_n)) =$$

$$= M_{(x_0, \dots, x_n)} (Q_n h(x_n) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - g(x_k))) =$$

$$= \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} h(x_n) \mathcal{P}(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} k(x_k, x_{k+1}) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k(x_k, x_{k+1})}{\rho(x_k, x_{k+1})} x$$

$$\times \frac{f(x_0)}{\mathcal{P}(x_0)} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - g(x_k)) dx_0 dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(x_0) h(x_n) \prod_{k=0}^{n-1} k(x_k, x_{k+1}) dx_0 \dots dx_n = (K^n f, h).$$

Учитывая (9), можно констатировать, что для неотрицательных функций $k(y, x)$, $h(x)$ и $f(x)$ теорема доказана. В последних выкладках было использовано очевидное соотношение

$$M(\Delta_n | x_0, \dots, x_n) = P(\Delta_n = 1 | x_0, \dots, x_n) =$$

$$= P(\delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_n = 1 | x_0, \dots, x_n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - g(x_k)).$$

Рассмотрим теперь общий случай знакопеременных $k(y, x)$, $f(x)$ и $h(x)$. Пусть Q_n^{\pm} - веса для задачи со следующими функциональными характеристиками:

$$k_+(y, x) = |k(y, x)|, f_+(x) = |f(x)|, h_+(x) = |h(x)|.$$

Очевидно, что

$$|\eta_m| = \left| \sum_{n=0}^m \Delta_n Q_n h(x_n) \right| \leq \sum_{n=0}^m |\Delta_n Q_n h(x_n)| =$$

$$= \sum_{n=0}^m \Delta_n Q_n^{\pm} h_+(x_n) = \eta_m^{\pm} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n Q_n^{\pm} h_+(x_n) = \xi_{\pm}.$$

В силу сделанных предположений величина $M \xi_{\pm} = (\varphi_{\pm}, h_{\pm})$ конечна (здесь $\varphi_{\pm} = K_{\pm} \varphi_{\pm} + f_{\pm}$). Таким образом, сходящаяся (с вероятностью 1) к ξ последовательность случайных величин абсолютно мажорируется монотонно возрастающей последовательностью η_m^{\pm} математическое ожидание предела которой конечно. По теореме Лебега в этом случае

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M \eta_m = M(\lim_{m \rightarrow \infty} \eta_m) = M \xi$$

Но

$$M \eta_m = M \sum_{n=0}^m \Delta_n Q_n h(x_n) = \sum_{n=0}^m M(\Delta_n Q_n h(x_n)) = \sum_{n=0}^m (K^n f, h).$$

так как соотношение $M(\Delta_n Q_n h(x_n)) = (K^n f, h)$ является общим. Следовательно

$$M \xi = \lim_{m \rightarrow \infty} M \eta_m = \sum_{n=0}^{\infty} (K^n f, h) = I_h.$$

Последний ряд конечен и равен I_h , так как

$$\|K^l\| \leq \|K^1\| < 1.$$

Теорема доказана полностью.

Заметим, что формально подставляя в выражение

$$M \xi = M \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n h(x_n) \right) = (\varphi, h) = (f, \varphi^*) \quad (10)$$

обобщенные функции $f(y) = \delta(y-x)$, $\mathcal{P}(y) = \delta(y-x)$ и полагая $Q_0 = 1$, приходим к выражению

$$\varphi^*(x) = h(x) + M \sum_{n=1}^{\infty} Q_n h(x_n) \quad (11)$$

Основная оценка функционала (φ, h) . Доказательство несмещенности.

Пусть необходимо оценить величину $I_h = (\varphi, h)$, где $\varphi = K\varphi + f$, причем для интегрального оператора K выполняется условие, обеспечивающее сходимость ряда Неймана: $\|K^l\| < 1$. Определим цепь Маркова начальной плотностью $\mathcal{P}(x)$ и переходной плотностью $\rho(y, x)$; N - случайный номер последнего состояния. Введем вспомогательные случайные веса Q_n по формулам

$$Q_0 = \frac{f(x_0)}{\mathcal{P}(x_0)}, \quad Q_n = Q_{n-1} \cdot \frac{k(x_{n-1}, x_n)}{\rho(x_{n-1}, x_n)}.$$

Рассмотрим случайную величину

$$\xi = \sum_{n=0}^N Q_n h(x_n).$$

Нашей целью является вывод соотношения $M\xi = I_h = (\varphi, h)$ при некоторых ограничениях на функции $\mathcal{P}(x)$, $\rho(y, x)$ и $g(x)$. Характер этих ограничений совершенно ясен: траектории цепи должны иметь возможность начинаться в тех точках, где $f(x) \neq 0$, а при переходе $y \rightarrow x$ попадать в точки, где $k(y, x) \neq 0$. Это означает, что должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) \neq 0 & \quad \text{при} \quad f(x) \neq 0, \\ \rho(y, x) \neq 0 & \quad \text{при} \quad k(y, x) \neq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

Случайная величина ξ наиболее часто используется на практике для оценки функционалов $I_h = (\varphi, h)$ (например, при решении задач теории переноса). Поэтому она называется основной оценкой I_h . Следующая теорема дает обоснование несмещенности этой оценки при сделанных предположениях. Для ее формулировки и доказательства потре-

буется вспомогательный интегральный оператор K_1 с ядром

$$k_1(y, x) = |k(y, x)|$$

Теорема I. Если выполняются условия (7) и $\|K_1^l\| < 1$ при некотором натуральном l , то

$$M\xi = M \sum_{n=0}^N Q_n h(x_n) = I_h = (\varphi, h).$$

Доказательство. Прежде всего дополним сумму, выражающую оценку, до бесконечной, после чего ее можно будет осреднять почленно. Будем считать цепь бесконечной, но введем еще одну координату состояния δ_n ($n = 1, 2, \dots$), которую положим равной нулю, если произошел обрыв при переходе $x_{n-1} \rightarrow x_n$, и единице, если обрыва не было; $\delta_0 = 1$. Далее, пусть

$$\Delta_n = \prod_{k=0}^n \delta_k.$$

Таким образом, Δ_n равно 1 до первого обрыва и 0 после него. Следовательно, можно записать

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n Q_n h(x_n) \quad (8)$$

Предположим временно, что функции $k(y, x)$, $f(x)$, $h(x)$ неотрицательны. Известно, что ряд, члены которого суть неотрицательные случайные величины, можно осреднять почленно. Поэтому

$$M\xi = \sum_{n=0}^{\infty} M(\Delta_n Q_n h(x_n)) \quad (9)$$

Для вычисления n -го члена последней суммы применим формулу полного математического ожидания:

называют последовательность случайных величин x_0, x_1, \dots, x_n связанных простейшей зависимостью, при которой распределение x_n определяется x_{n-1} при любом $n=1, 2, \dots$, причем условная плотность распределения x_n при условии $x_{n-1}=y$ для любого n равна заданной функции $r(y, x)$ и не зависит от номера n . Функцию $r(y, x)$ называют плотностью вероятностей перехода и обозначают иногда еще так: $r(y \rightarrow x)$. Распределение начального состояния x_0 задано начальной плотностью $\mathcal{T}(x)$.

Понятие однородной цепи Маркова можно расширить введя вероятность обрыва $g(y)$ траектории при переходе $y \rightarrow x$. Функцию $p(y, x) = r(y, x)(1-g(y))$ будем называть переходной плотностью; заметим, что

$$\int_{\Omega} p(y, x) dx = 1 - g(y) \leq 1.$$

Случайный номер последнего состояния, непосредственно предшествующего обрыву (иначе поглощению), будем обозначать символом N . Решение интегральных уравнений методом Монте-Карло связано с моделированием цепей Маркова, которые тем самым должны обрываться с вероятностью 1 через конечное (хотя и случайное) число переходов. Более того, математическое ожидание $M(N)$ должно быть конечным. Теперь покажем, при каких ограничениях на характеристики цепи Маркова математическое ожидание $M(N)$ будет конечным. Также отметим, что мы будем рассматривать цепь Маркова, определяемую начальной плотностью $\mathcal{T}(x)$ и переходной плотностью

$$p(y, x) = r(y, x)(1-g(y)).$$

Условия, достаточные для конечности среднего числа состояний $M(N)$.

Введем обозначение: K_p - интегральный оператор с ядром $p(y, x)$, действующий из L_1 в L_1 . Пользуясь формулой полной вероятности, определим вероятность события $N=n$:

$$\begin{aligned} P(N=n) &= M_{(x_0, x_1, \dots, x_n)} (P(N=n | x_0, x_1, \dots, x_n)) = \\ &= M_{(x_0, x_1, \dots, x_n)} \left(g(x_n) \prod_{k=0}^{n-1} (1-g(x_k)) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \dots \int \mathcal{T}(x_0) g(x_n) \prod_{k=0}^{n-1} (1-g(x_k)) r(x_k, x_{k+1}) dx_0 \dots dx_n = \\ &= \int \dots \int \mathcal{T}(x_0) g(x_n) \prod_{k=0}^{n-1} p(x_k, x_{k+1}) dx_0 \dots dx_n = (K_p^n \mathcal{T}, g). \quad (5) \end{aligned}$$

Очевидно, для получения вероятности $P(N \geq n)$ следует в последнем выражении заменить $g(x)$ на $\delta(x) \equiv 1$, то есть

$$P(N \geq n) = (K_p^n \mathcal{T}, \delta).$$

Далее, $P(N = \infty) \leq P(N \geq n)$,

так как $(N = \infty) \subset (N \geq n)$. Полученные соотношения показывают, что $P(N \geq n) \rightarrow 0$ и, следовательно,

$P(N = \infty) = 0$, если сходится ряд Неймана для уравнения $f = K_p f + \mathcal{T}$. Как уже было сказано выше, для этого достаточно существование такого ℓ , при котором

$$\|K_p \ell\| < 1. \quad (6)$$

Таким образом, при выполнении (6) цепь обрывается после конечного числа переходов с вероятностью 1. Оказывается, что условие (6) является достаточным и для конечности величины $M(N)$. Действительно,

$$\begin{aligned} M(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} n (K_p^n \mathcal{T}, g) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n K_p^n \mathcal{T}, g \right) = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} K_p^k \mathcal{T}, g \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} K_p^n \Psi, g \right) = (\Psi_p, g). \end{aligned}$$

Здесь, $\Psi = K_p \Psi + \mathcal{T}$, $\Psi_p = K_p \Psi_p + K_p \Psi$. При выполнении (6) имеем $\Psi, \Psi_p \in L_1$, $(\Psi_p, g) < \infty$. В частности, $M(N) < \infty$, если $g(x) \geq \varepsilon > 0$, так как при этом

$$\|K_p\| = \sup_x \int_{\Omega} p(x, y) dy = \sup_x (1-g(x)) \leq 1 - \varepsilon.$$

Рассмотрим интегральное уравнение второго рода.

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} k(y, x) \varphi(y) dy + f(x) \quad \text{или} \quad \varphi = K\varphi + f, \quad (I)$$

где Ω - n -мерное евклидово пространство, $f, \varphi \in L$, $K \in [L \rightarrow L]$, L - некоторое банахово пространство интегрируемых функций. Для многих приложений целесообразно полагать $L = L_1$, при этом

$$\|f\| = \int_{\Omega} |f(x)| dx, \quad \|K\| \leq \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |k(x, y)| dy.$$

Алгоритмы Монте-Карло основаны на представлении решения уравнения (I) рядом Неймана:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} K^n f \quad (2)$$

Оператор K^n определяется формулой

$$[K^n f](x) = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(x_0) k(x_0, x_1) \dots k(x_{n-1}, x) dx_0 \dots dx_{n-1}.$$

Известно, что ряд (2) сходится по норме и решение уравнения (I) существует, если $\|K\| < 1$. Однако, для сходимости ряда Неймана и существования решения достаточно и более слабое условие: $\|K^l\| < 1$, где l - некоторое натуральное число. Это сразу получается из рассмотрения следующего уравнения:

$$\varphi = K^l \varphi + K^{l-1} f + \dots + K f + f.$$

В дальнейшем будет использовано сопряженное к (I) уравнение

$$\varphi^* = K^* \varphi^* + h, \quad (3)$$

где $\varphi^*, h \in L^*$, $K^* \in [L^* \rightarrow L^*]$, L^* - сопряженное к L пространство функций, K^* - оператор, сопряженный к K . Напомним следующие свойства сопряженных пространств и операторов:

$$|(h, f)| \leq \|f\|_L \cdot \|h\|_{L^*},$$

$$\text{где } (f, h) = \int_{\Omega} f(x) h(x) dx, \quad \|K\| = \|K^*\|,$$

$$(K f, h) = (f, K^* h), \quad [K^* h](x) = \int_{\Omega} k(x, y) h(y) dy.$$

Заметим также, что сопряженным к L_1 является пространство L_{∞} ограниченных (почти везде) функций с нормой

$$\|h\|_{L_{\infty}} = \text{vrai sup} |h(x)|, \quad x \in \Omega$$

Символ *vrai* означает, что при определении точной верхней границы функции $h(x)$ из Ω может быть выброшено любое множество нулевой меры Лебега.

Рассмотрим алгоритмы метода Монте-Карло для оценки функционалов вида

$$I_h = (\varphi, h) = \sum_{n=0}^{\infty} (K^n f, h). \quad (4)$$

Сходимость последнего ряда вытекает из сходимости по норме ряда Неймана для φ . Нетрудно показать, что

$$(\varphi, h) = (f, \varphi^*), \quad \text{где } \varphi^* = K^* \varphi^* + h.$$

Как уже указывалось во введении, однородной цепью Маркова

Подставляя вместо $q_{i_0}^{(0)}$ и $q_{i_{n-1}, i_n}^{(m)}$ их значения из (5) и меняя порядок суммирования, получим

$$M_{\xi_N} = \sum_{m=0}^N \sum_{i_0=1}^n \dots \sum_{i_{m-1}=1}^n h_{i_0} a_{i_0, i_1} \dots a_{i_{m-1}, i_m} \cdot f_{i_m}$$

По определению произведения матриц

$$A^2 = (a_{i_0, i_1})_{i_0, i_1=1}^n \times (a_{i_1, i_2})_{i_1, i_2=1}^n = \left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_0, i_1} a_{i_1, i_2} \right)_{i_0, i_2=1}^n,$$

$$A^m = \left(\sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{m-1}=1}^n a_{i_0, i_1} \dots a_{i_{m-1}, i_m} \right)_{i_0, i_m=1}^n$$

Отсюда следует $M_{\xi_N} = (h, \sum_{m=0}^N A^m \cdot f)$

При $N \rightarrow \infty$ M_{ξ_N} стремится к (h, \bar{x})

Это одна из возможных схем метода Монте-Карло, связанных с СЛАУ, которая заключается в вычислении средних значений случайной величины ξ_N по траекториям цепи Маркова.

Замечания.

I. Известно, что $(h, \bar{x}) = (y, f)$, где y есть решение уравнения

$$y = A^T y + h, \quad (7)$$

а A^T - матрица, транспонированная к A .

Равенство $(h, \bar{x}) = (y, f)$ легко проверяется непосредственно: $f = \bar{x} - A\bar{x}$ и $h = y - A^T y$. Тогда

$$(h, \bar{x}) = (y - A^T y, \bar{x}) = (y, \bar{x}) - (A^T y, \bar{x}) = (y, \bar{x}) - (y, A\bar{x})$$

с другой стороны

$$(y, f) = (y, \bar{x} - A\bar{x}) = (y, \bar{x}) - (y, A\bar{x}).$$

Отсюда следует, что при вычислении скалярного произведения (h, \bar{x}) можно исходить из уравнения $y = A^T y + h$.

Марковские цепи, соответствующие обоим уравнениям, могут совпадать, если для них одновременно выполнены условия (4). Схема, связанная с уравнением (7) (сопряженная схема), более удобна, если нужно вычислять одновременно несколько скалярных произведений (h_j, \bar{x}) , $j=1, \dots, m$, так как в этом случае марковская цепь остается неизменной для всех j , а изменяется лишь случайная величина ξ_N и возможна оценка ее среднего по одним и тем же траекториям.

2. Для получения решения системы (I) достаточно взять в качестве h_j n векторов, у которых j -я компонента равна единице, а остальные равны нулю.

Как известно, Γ -й столбец матрицы $(E-A)^{-1}$ может быть получен как решение системы $x = Ax + h_\Gamma$, где h_Γ - вектор столбец с единичной Γ -й компонентой и нулевыми остальными компонентами. Поэтому при $f = h_\Gamma$ и $h = h_j$ схема, связанная с уравнением (I), дает в качестве среднего значения ξ_N элемент матрицы $(E-A)^{-1}$ с номером столбца Γ и номером строки j , а схема, связанная с уравнением (7), - элемент той же матрицы с номером строки Γ и столбца j . Разность $M_{\xi_{N+1}} - M_{\xi_N}$ есть $(h, A^{N+1}f)$ для первой из схем и $(f, (A^T)^{N+1}h)$ - для второй. Оценки этих скалярных произведений могут быть использованы для определения собственных чисел матрицы A , коэффициентов характеристического многочлена и т.п. в соответствии с известными вычислительными схемами линейной алгебры.

3. Из равенства $\lim_{N \rightarrow \infty} M_{\xi_N} = (h, \bar{x})$ следует, что несмещенность оценки ξ_N имеет место для траекторий марковской цепи бесконечной длины.

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} + f \quad (2)$$

Если положим $x^{(0)} = f$, то

$$x^{(k)} = (A^k + A^{k-1} + \dots + A + E) \cdot f, \quad (3)$$

и точное решение системы есть

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} (E + A + \dots + A^k) f = (E - A)^{-1} \cdot f.$$

Сопоставим системе (I) цепь Маркова с n состояниями. Начальное распределение ρ и матрицу перехода \mathcal{P}^l (l - номер перехода) подчиним некоторым дополнительным условиям, связанным с системой (I), которые сформулируем в дальнейшем, и рассмотрим задачу о вычислении скалярного произведения (h, \bar{x}) , где h - заданный вектор. Задача о вычислении одной из компонент решения \bar{x} является частным случаем этой задачи. Действительно,

$(h, \bar{x}) = \sum_{i=1}^n h_i \bar{x}_i$. Если надо вычислить только компоненту \bar{x}_j решения \bar{x} , то достаточно выбрать вектор h таким, что j -я компонента равна единице, а остальные равны нулю ($1 \leq j \leq n$).

Если одновременно вычисляется некоторое количество m скалярных произведений (\bar{h}_j, \bar{x}) , $j = 1, 2, \dots, m$, то решение системы \bar{x} может быть также получено при соответствующем выборе m и \bar{h}_j . Мы будем связывать с системой (I) и вектором h некоторую фиксированную цепь Маркова из множества цепей $\{\rho, \mathcal{P}^l\}$,

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n),$$

$$\mathcal{P}^l = (p_{ij}^{(l)})_{i,j=1}^n, \quad \sum_{i=1}^n p_{i1} = 1, \quad p_{i1} \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}^{(l)} = 1, \quad p_{ij}^{(l)} \geq 0, \quad (i=1, \dots, n), (l=1, 2, \dots),$$

для которых выполнены условия:

1. $p_i > 0$, если $h_i \neq 0$
2. $p_{ij}^{(l)} > 0$, если $a_{ij} \neq 0, i, j = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots$ (4)

Положим

$$q_i^{(0)} = \begin{cases} h_i/p_i, & p_i > 0, \\ 0, & p_i = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad q_{ij}^{(l)} = \begin{cases} a_{ij}/p_{ij}^{(l)}, & p_{ij}^{(l)} > 0, \\ 0, & p_{ij}^{(l)} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Зададимся некоторым целым $N > 0$ и будем рассматривать траекторию цепи Маркова длины N . Объект, описываемый цепью Маркова, мы будем часто в дальнейшем именовать частицей и считать, что эта частица изменяет свои состояния (движется) в соответствии с траекторией изменяется при движении ее по траектории $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_N$ следующим образом. В начальный момент, когда частица находится в состоянии i_0 , она имеет "вес" $Q_0 = q_{i_0}^{(0)}$, при переходе из состояния i_0 в состояние i_1 ее вес становится равным $Q_1 = q_{i_0}^{(0)} \cdot q_{i_0 i_1}^{(1)}$ и так далее, то есть

$$Q_0 = q_{i_0}^{(0)}, \quad Q_m = Q_{m-1} \cdot q_{i_{m-1} i_m}^{(m)}.$$

Введем случайную величину ξ_N , определенную на траекториях марковской цепи длины N :

$$\xi_N = \sum_{m=0}^N Q_m f_{i_m} \quad (6)$$

Каждой траектории длины N соответствует вероятность и математическое ожидание есть

$$M \xi_N = \sum_{i_0=1}^n \dots \sum_{i_{N-1}=1}^n \xi_N p_{i_0 i_1}^{(1)} \dots p_{i_{N-1} i_N}^{(N)} = \sum_{i_0=1}^n \dots \sum_{i_{N-1}=1}^n p_{i_0 i_1}^{(1)} \dots p_{i_{N-1} i_N}^{(N)} \sum_{m=0}^N q_{i_0}^{(0)} q_{i_0 i_1}^{(1)} \dots q_{i_{m-1} i_m}^{(m)} f_{i_m}.$$

Тогда
$$M\eta = \int_a^b \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx = I$$

Рассмотрим N одинаковых независимых случайных величин $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$ и применим к их сумме центральную предельную теорему

$$P\left(\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i - I\right| < 3\sqrt{\frac{D\eta}{N}}\right) \approx 0.997$$

Это соотношение означает, что если мы выберем N значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, то при достаточно большом N

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(\xi_i)}{p(\xi_i)} \approx I$$

Оно показывает также, что с очень большой вероятностью погрешность приближения последнего не превосходит $3\sqrt{D\eta/N}$.

2. Для приближенного вычисления дисперсии использовать формулу

$$D\eta \approx \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{f(\xi_i)}{p(\xi_i)}\right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{f(\xi_i)}{p(\xi_i)}\right)^2 \right] \quad (16)$$

Упражнения.

8. Приблизительно вычислить интеграл $I = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$ с помощью формул (13), (14), (15) и соответствующие дисперсии по формуле (16) для $N=10, 100, 10000$; сравнить результаты.

9. Доказать, что функции $p(x) = 2/\pi$, $p(x) = 8x/\pi^2$ и $p(x) = 24x^2/\pi^3$ являются плотностями вероятностей непрерывной случайной величины ξ из $(0, \pi/2)$

10. Доказать (графически и численно) что линейная плотность ($p(x) = 8x/\pi^2$) даст лучший результат вычисления интеграла.

§ 3 Цепи Маркова с конечным числом состояний и решение систем линейных алгебраических

уравнений (СЛАУ).

Моделирование цепи Маркова с конечным числом состояний сводится к моделированию последовательности случайных величин с дискретным распределением. Процедура моделирования выглядит следующим образом.

Пусть $\{p, \mathcal{P}\}$ - однородная цепь Маркова с n состояниями, где $p = (p_1, \dots, p_n)$ - распределение вероятностей начальных состояний, а $\mathcal{P} = (P_{ij})_{i,j=1}^n$ - переходная стохастическая матрица. Для элементов матрицы \mathcal{P} выполняются соотношения

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad P_{ij} \geq 0,$$

так что ее строка с номером i представляет собой распределение вероятностей. Объем, который может находиться в n состояниях и описывается цепью Маркова, обычно рассматривается в дискретные моменты времени. Чтобы получить номер состояния в начальный момент времени, моделируют распределение вероятностей p . Затем, если объект находится в состоянии с номером i , то выбирается строка с номером i матрицы \mathcal{P} и моделируется распределение, определенное этой строкой. Таким путем строится последовательность реализаций случайных номеров состояний, образующих траекторию данной цепи Маркова.

Простейшая схема, связанная с асимптотически несмещенной оценкой решения, состоит в следующем:

Пусть СЛАУ задана в виде

$$x = Ax + f, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)'$ - вектор-столбец неизвестных,

$f = (f_1, \dots, f_n)'$ - вектор правых частей и

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ - матрица системы.

Предположим, что наибольшее по модулю собственное число $\lambda(A)$ меньше единицы, так что сходится метод последовательных приближений.

Знак равенства, согласно теореме I, достигается при

$$q(x) = q_0(x) = \frac{1}{I} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2(x) \right)^{1/2} p(x).$$

Таким образом, минимум (II) достигается при $q(x) = q_0(x)$ и равен

$$\tilde{I}^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 I_i^2.$$

Полученный результат важен, когда моделирование каждой из плотностей, близких к $|f_i| p^{-1}$, - достаточно трудоемкая задача, и целесообразно ограничиться оптимальным выбором одной плотности, "средней" между оптимальными плотностями.

Пример 2. Вычислить приближенно интеграл

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx.$$

Точное значение этого интеграла равно 1.

Используем для вычисления три различные случайные величины ξ :

- 1) с постоянной плотностью $p(x) = 2/\pi$ (т.е. ξ равномерно распределена в интервале $(0, \pi/2)$);
 2) с линейной плотностью $p(x) = 8x/\pi^2$; 3) с плотностью $p(x) = 24x^2/\pi^3$.

I. Пусть $p(x) = 2/\pi$ (см. § I., Упражнение 7)

Чтобы разыгрывать значения ξ , составим уравнение

$$\int_0^{\xi} \frac{2}{\pi} dx = \alpha \quad (\text{здесь } a=0, b=\pi/2)$$

Отсюда $\xi = (\frac{\pi}{2}) \cdot \alpha$. Следовательно

$$I \approx \frac{\pi}{2N} \sum_{i=1}^N \sin \xi_i. \quad (I3)$$

2. Пусть $p(x) = 8x/\pi^2$. Для разыгрывания ξ используем уравнение

$$\int_0^{\xi} \frac{8x}{\pi^2} dx = \alpha.$$

Отсюда после несложных вычислений получим

$$\xi = (\pi/2) \sqrt{\alpha}. \quad \text{Следовательно}$$

$$I \approx \frac{\pi^2}{8N} \sum_{i=1}^N \frac{\sin \xi_i}{\xi_i}. \quad (I4)$$

3. Пусть теперь $p(x) = 24x^2/\pi^3$. ξ находим из уравнения

$$\int_0^{\xi} \frac{24x^2}{\pi^3} dx = \alpha.$$

Отсюда

$$\xi = \frac{\pi}{2} \sqrt[3]{\alpha}.$$

Следовательно $I \approx \frac{\pi^3}{24N} \sum_{i=1}^N \frac{\sin \xi_i}{\xi_i^2}. \quad (I5)$

Замечания.

I. Для вычисления интеграла $I = \int_a^b f(x) dx$ мы выбрали произвольную плотность распределения $p(x)$, определенную на интервале (a, b) . Наряду со случайной величиной ξ , определенной в интервале (a, b) с плотностью $p(x)$, мы построили случайную величину

$$\eta = f(\xi)/p(\xi).$$

$\mathcal{X}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(y_i) \frac{p(y_i)}{q(y_i)}$, где y_i независимы и распределены с плотностью $q(y)$. Оценки $\mathcal{X}_N^1 = \mathcal{X}_N^2(q)$ образуют семейство несмещенных оценок интеграла I , и можно поставить задачу о выборе оптимальной плотности $q = q_0$, при которой дисперсия минимальна. Заметим, что $\mathcal{X}_N^2(q)$ может иметь при некоторых q и бесконечную дисперсию. Если конечен интеграл $\int |f(x)| p(x) dx$, то существует такая плотность q , при которой дисперсия $\mathcal{X}_N^2(q)$ обязательно конечна.

Теорема I. Минимальная дисперсия реализуется для плотности q_0 , пропорциональной $|f(x)| p(x)$, и выражается равенством

$$D\mathcal{X}_N^2(q_0) = \frac{1}{N} \left(\left(\int |f(x)| p(x) dx \right)^2 - I^2 \right). \quad (I0)$$

Доказательство. Если q_0 пропорциональна $|f(x)| p(x)$, то

$$q_0(x) = \frac{|f(x)| p(x)}{\int |f(x)| p(x) dx},$$

$$D\mathcal{X}_N^2(q_0) = \frac{1}{N} \left(\int \frac{f^2(x) p^2(x)}{|f(x)| p(x)} dx - I^2 \right).$$

Отсюда следует (I0) и конечность дисперсии, если конечен интеграл $\int |f(x)| p(x) dx$. Оптимальность же плотности q_0 следует из того, что для любой $q(x) > 0$ величина $\int f^2(x) p^2(x) / q(x) dx$ больше или равна $(\int |f(x)| p(x) dx)^2$, ибо их разность есть дисперсия случайной величины $|f(\xi)| p(\xi) / q(\xi)$, где ξ распределена с плотностью $q(x)$, а дисперсия - величина неотрицательная.

1) Применение к оцениванию несобственных интегралов.

Пример I. Пусть мы хотим оценить интеграл $I = \int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx$, где $g(x)$ - непрерывная на $[0, 1]$ функция такая,

что $g(0) \neq 0$. Оценка $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(\alpha_i)}{\sqrt{\alpha_i}}$, где α_i независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$, имеет, как легко подсчитать, бесконечную дисперсию. Если же "включить особенность в плотность" и оценивать I с помощью суммы $\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N g(\xi_i)$, где ξ_i распределены с плотностью $\frac{1}{2\sqrt{y}}$, то дисперсия оценки оказывается конечной.

2) Выбор оптимальной плотности при оценке нескольких интегралов. Пусть требуется вычислить n интегралов $I_i = \int f_i(x) p(x) dx$. Выбирается некоторая плотность вероятностей $q(x)$, и интегралы I_i оцениваются с помощью средних

$$\mathcal{X}^{(i)}(q) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_i(\xi_j) \frac{p(\xi_j)}{q(\xi_j)}.$$

Зададимся вещественными константами a_i ($i=1, \dots, n$) и подберем плотность $q(x)$ так, чтобы обратить в минимум сумму

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 D\mathcal{X}^{(i)}(q) = \int \sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2(x) \frac{p^2(x)}{q(x)} dx - \sum_{i=1}^n a_i^2 I_i^2. \quad (II)$$

Ее минимум достигается, когда достигается минимум выражения

$$S = \int \sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2(x) \frac{p^2(x)}{q(x)} dx.$$

Если обозначить $\eta = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2(\xi) \right)^{1/2} \frac{p(\xi)}{q(\xi)}$, то

$$D\eta = S - \tilde{I}^2 \geq 0,$$

где $\tilde{I} = \int \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2 \right)^{1/2} p(x) dx$, то есть

$$S \geq \left(\int \sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2 \right)^{1/2} p(x) dx. \quad (I2)$$

был минимальным.

Способ оценивания интеграла $\int f(x) dF(x)$ при помощи среднего арифметического $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$, где

x_i - независимые реализации случайной величины, имеющей функцию распределения F , обладает следующими особенностями и преимуществами по сравнению с классическими методами интегрирования.

1) Естественным образом строится алгоритм интегрирования, если имеется алгоритм моделирования случайной величины, распределенной по закону $F(x)$.

2) Порядок убывания остатка

$$\int f(x) dF(x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (8)$$

не зависит от размерности S . Если $f(x)$ - фиксированная функция, для которой существует и конечен интеграл

$\int f^2(x) dF(x)$ ($f \in L_2(F)$), то остаток (8) убывает как $N^{-1/2}$ при фиксированном доверительном уровне γ .

Вероятностный характер сходимости отличает метод Монте-Карло от классических процедур интегрирования. Такой же порядок убывания остатка, впрочем, имеет место для любой f из класса функций F , если $f \in L_2(F)$. Характер класса F при $f \in L_2(F)$ может отразиться лишь на скорости сходимости распределения среднего $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$ к нормальному закону. Если $L_2(F) \subset F$, то остаток убывает, вообще говоря, медленнее, чем $N^{-1/2}$, и предельное распределение среднего арифметического отлично от нормального.

3) Последовательный характер оценивания интеграла. При увеличении N естественным образом используется вычисленные ранее значения функции. Детерминированные квадратурные формулы далеко не всегда обладают таким свойством.

4) Простая процедура оценки погрешности параллельно с основными вычислениями. Так, если сходимость распределения среднего арифметического к нормальному закону имеет порядок

$O(N^{-1/2})$, то вычисляя среднее арифметическое квадра-

тов значений функций в точках x_i , мы можем оценить дисперсию среднего арифметического и построить доверительный интервал, соответствующий заданному уровню доверия.

Практически оценка погрешности детерминированных квадратурных формул, когда вид f достаточно сложен, в подавляющем большинстве случаев оказывается безнадежно трудной задачей, ибо требует оценки супремума производных функции. Даже определение класса дифференцируемых функций, к которому принадлежит f , дело далеко не простое. Использование метода Монте-Карло, строго говоря, требует также сведений о принадлежности f к определенному классу функций. Желательно, чтобы интеграл $\int |f^3(x)| dF(x)$ имел конечное значение, что обеспечивает асимптотическую нормальность распределения среднего арифметического и достаточную для практических целей точность оценки дисперсии. Требование конечности третьего момента, однако, менее ограничительно, чем ограниченность производных, и может контролироваться в процессе вычислений.

Как отметили, что асимптотическая скорость убывания погрешности равна $\sqrt{D\mathfrak{z}/N}$, где \mathfrak{z} - несмещенная оценка интеграла. Очевидно, что \mathfrak{z} нужно строить так, чтобы $D\mathfrak{z}$ было по возможности малой величиной и чтобы моделирование реализаций \mathfrak{z} не было настолько сложным.

Метод существенной выборки (выборка по важности)

Пусть $I = \int f(x) p(x) dx$, где $p(x)$ - плотность. Если $q(x)$ - плотность такая, что $q(x) > 0$ для тех x для которых $p(x) > 0$, то очевидно, что

$$I = \int f(x) \frac{p(x)}{q(x)} \cdot q(x) dx \quad (9)$$

Отсюда следует, что наряду с суммой $x_N^1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$, где x_i - независимые реализации случайной величины, имеющей плотность $p(x)$, интеграл можно оценить суммой

По совместной плотности φ и ψ вычислим плотности этих величин:

$$P_1(\varphi) = \int_0^{2\pi} p(\varphi, \psi) d\psi = \frac{1}{2} \sin \varphi,$$

$$P_2(\psi) = \int_0^{\pi} p(\varphi, \psi) d\varphi = \frac{1}{2\pi}.$$

Равенство $p(\varphi, \psi) = P_1(\varphi)P_2(\psi)$ показывает, что φ и ψ независимы. Очевидно, ψ равномерно распределена в интервале $(0, 2\pi)$, и формула для разыгрывания запишется в виде

$$\psi = 2\pi\alpha, \quad \alpha \in [0, 1) \quad (*)$$

Формулу для разыгрывания φ получим методом обратных функций

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} P_1(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) = 1 - \alpha,$$

откуда $\cos \varphi = 2\alpha - 1$ (**)

Формулы (*), (**) позволяют выбирать (разыгрывать) случайное направление. Здесь значения α в этих формулах должны быть независимы.

§ 2. Вычисление определенного интеграла

Как отмечалось во Введении, одной из основных задач метода Монте-Карло является оценивание математического ожидания случайной величины. Известно, что математическое ожидание случайной величины можно представить в виде интеграла Лебега-Стилтьеса по соответствующей вероятностной мере. Будем считать, что вероятностная мера задается в виде обобщенной плотности и соответствующие интегралы по гиперповерхностям, на которых мера сосредоточена, понимаются в смысле Римана. Таким образом, если $F(x)$ - функция распределения, зада-

ваемая обобщенной плотностью, то математическое ожидание случайной величины $f(\xi)$, где ξ имеет функцию распределения $F(x)$, может быть представлено в виде

$$Mf(\xi) = \int f(x) dF(x). \quad (3)$$

Классическая теория приближенного интегрирования рассматривает, по существу, частный случай, когда плотность задана в некоторой области Ω S -мерного евклидова пространства. В этом случае речь идет о вычислении интеграла

$$\int_{\Omega} f(x) p(x) dx, \quad p(x) > 0. \quad (4)$$

Этот интеграл вычисляется обычно с помощью квадратурных сумм вида

$$K_n[f] = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i), \quad (5)$$

где A_i - постоянные, которые не зависят от $f, x_i \in \Omega$ ($i=1, \dots, n$).

Приближенная формула

$$\int_{\Omega} f(x) p(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (6)$$

носит название квадратурной (при $S > 1$ часто кубатурной) формулы. Постоянные A_i называют коэффициентами, а x_i - узлами этой формулы. Основная задача теории квадратурных формул состоит в выборе коэффициентов и узлов формулы так, чтобы она имела возможно большую точность, т.е. чтобы модуль остатка $R_n[f]$ формулы

$$R_n[f] = \int_{\Omega} f(x) p(x) dx - \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (7)$$

рованную ось, например, ось X . Единичный вектор, исходящий из начала координат, будем определять следующими двумя величинами: μ - косинус угла между вектором и осью X , φ - угол между плоскостью "вектор-ось X " и некоторой фиксированной плоскостью, проходящей через ось X . Очевидно, что для изотропного вектора угол φ распределен равномерно в интервале $(0, 2\pi)$, а распределение μ симметрично относительно точки $\mu = 0$. Далее для $x \geq 0$ имеем

$$P(x \leq \mu \leq x + dx) = c \cdot dx,$$

где $c = \text{const}$, так как площадь сферического пояса пропорциональна его высоте. Следовательно, величина μ распределена равномерно в интервале $(-1, 1]$.

Таким образом, изотропный вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ можно моделировать по формулам

$$\omega_1 = 1 - 2\alpha_1, \quad \omega_2 = \sqrt{1 - \omega_1^2} \cdot \cos 2\pi\alpha_2,$$

$$\omega_3 = \sqrt{1 - \omega_1^2} \cdot \sin 2\pi\alpha_3.$$

Более экономичным является следующий алгоритм:

- 1) $\omega_1 = 1 - 2\alpha$;
- 2) $\gamma_1 = 1 - 2\alpha_1, \gamma_2 = 1 - 2\alpha_2, D = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$;
- 3) если $D > 1$, то повторяется 2) и так далее, иначе

$$\omega_2 = \gamma_1 \cdot \sqrt{\frac{1 - \omega_1^2}{D}}, \quad \omega_3 = \gamma_2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \omega_1^2}{D}}$$

Моделирование случайных векторов.

Для плотности $f(x_1, \dots, x_n)$ распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ справедливо представление

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2|x_1) f_3(x_3|x_1, x_2) \dots$$

$$f_n(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

где $f_1(x_1)$ - плотность абсолютного (маргинального) распределения ξ_1 , $f_k(x_k|x_1, \dots, x_{k-1})$ - плотность условного распределения ξ_k при условии

$$\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_{k-1} = x_{k-1}.$$

Справедливо обратное соотношение. Для моделирования случайного вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) достаточно моделировать ξ_1 соответственно $f_1(x_1)$, а ξ_k - соответственно $f_k(x_k|x_1, \dots, x_{k-1})$ ($k=2, \dots, n$). Такой метод называется стандартным методом моделирования случайных векторов.

Выбор случайного направления в пространстве.

Условимся задавать направление единичным вектором, выходящим из начала координат. Концы таких векторов расположены на поверхности единичной сферы. Слова "любое направление одинаково вероятно" означают, что конец вектора представляет собой случайную точку Ω , равномерно распределенную на поверхности этой сферы: вероятность того, что Ω окажется в любом элементе поверхности dS , равна $dS/(4\pi)$ (т.к. радиус сферы $R \equiv 1$).

Выберем на поверхности сферы сферические координаты (φ, ψ) с полярной осью Ox .

$$\text{Тогда } dS = \sin \varphi d\varphi d\psi$$

причем $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \psi < 2\pi$

Обозначим через $P(\varphi, \psi)$ плотность случайной точки (φ, ψ) . Из требования

$$P(\varphi, \psi) d\varphi d\psi = dS/(4\pi).$$

Из предыдущего равенства вытекает, что

$$P(\varphi, \psi) = \sin \varphi / (4\pi).$$

Отсюда $\varphi(\alpha) = F_2^{-1}(\alpha)$.

С другой стороны,

$$P(F^{-1}(\alpha) < x) = P(\alpha < F(x)) = F(x).$$

Следовательно, в предположении монотонного возрастания $\varphi(\alpha)$ мы получаем единственную моделирующую формулу

$$\xi = F^{-1}(\alpha), \quad (2)$$

которая представляет собой стандартный метод моделирования непрерывной случайной величины.

Предположим теперь, что φ монотонно убывает и $\eta = \varphi(\alpha)$. Тогда

$$F_2(x) = P(\varphi(\alpha) < x) = P(\alpha > \varphi^{-1}(x)) = 1 - \varphi^{-1}(x)$$

и $\varphi(\alpha) = F_2^{-1}(1 - \alpha)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(1 - \alpha) < x) &= P(1 - \alpha < F(x)) = \\ &= P(\alpha > 1 - F(x)) = F(x). \end{aligned}$$

Таким образом, в случае монотонного убывания φ имеется также единственная моделирующая формула

$$\xi = F^{-1}(1 - \alpha),$$

которая по существу эквивалентна (2), так как случайные величины $1 - \alpha$ и α одинаково распределены.

Упражнение.

5. Длина свободного пробега нейтрона в однородном веществе распределена с плотностью $f(x) = b \cdot e^{-bx}$, ($x > 0$). Найдите $F(x)$ и ξ .

6. Простейший поток (или поток Пуассона) называется такой поток заявок, когда промежуток времени ξ между двумя последовательными заявками есть случайная величина, распределенная в интервале $(0, \infty)$ с плотностью

$$f(x) = a \cdot e^{-ax}$$

Этот закон распределения называют также экспоненциальным распределением.

Найти ξ .

7. Случайная величина ξ называется равномерно распределенной в интервале (a, b) , если ее плотность постоянна в этом интервале:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b.$$

Найти ξ .

Многомерный изотропный вектор и алгоритм моделирования изотропного вектора w .

Определение. Случайный вектор $w = (w_1, \dots, w_n)$ называется изотропным, если точка $w/|w|$ распределена равномерно по поверхности сферы $|w| = 1$ и не зависит от $|w|$. Наиболее простым является следующий алгоритм:

- 1) $\gamma_1 = 1 - 2\alpha_1, \dots, \gamma_n = 1 - 2\alpha_n, d^2 = \sum_{k=1}^n \gamma_k^2$;
- 2) если $d^2 > 1$, то повторяем 1) и так далее, иначе

$$w_1 = \gamma_1/d, \dots, w_n = \gamma_n/d.$$

Алгоритм состоит в том, что точка $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ выбирается равномерно по объему куба $-1 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1$ и те точки, которые не попали в шар единичного радиуса, исключаются. Вероятность P положительного исхода равна отношению объемов указанных шара и куба; в случае $n = 2m$ она выражается формулой

$$P = \frac{\pi^m}{m! 2^m} = \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \cdot 2^{-m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Смысл алгоритма очевиден: вектор, конец которого есть точка, распределенная равномерно в шаре, является изотропным.

Моделирование изотропного направления в трехмерном пространстве. Рассмотрим в таком пространстве некоторую фикси-

$$P\{\xi(t_2) < \alpha | \xi(t), t < t_1\} = P\{\xi(t_2) < \alpha | \xi(t_1)\}$$

Марковский случайный процесс может быть задан переходными вероятностями и начальным распределением вероятностей. В этом случае предполагается, что Θ имеет минимальный элемент θ_0 , при котором заданы начальное распределение вероятностей P_0 случайной величины $\xi(\theta_0)$ и функция (переходная вероятность) $P(w, t; v, \theta)$ ($w, w' \in \Omega$; $t, \theta \in \Theta$; $v \in \mathcal{U}$), удовлетворяющая для почти всех равенству

$$P(w, t; v, \theta) = \int P(w'', \tau; v, \theta) P(w, t; dw'', \tau)$$

(уравнение Чепмена-Колмогорова). Последнее обеспечивает выполнение условий согласованности конечномерных распределений процесса.

Важным частным случаем марковского процесса является марковская цепь с конечным числом состояний m . В этом случае функция $\xi(\theta, \omega)$ может принимать лишь конечное число m значений. Цепь в стационарном случае при $\theta = \theta_0$ определяется дискретным начальным распределением. Роль переходной вероятности играет переходная (стохастическая) матрица $P = \{P_{ij}\}_{i,j=1}^m$, элементы которой удовлетворяют условиям

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m P_{ij} = 1.$$

§ I. Моделирование некоторых случайных величин и векторов

Для решения задач методом Монте-Карло необходимо получать на ЭВМ последовательность выборочных значений случайной величины с заданным распределением. Такой процесс называется моделированием случайной величины. Случайные величины обычно моделируют с помощью преобразований одного или нескольких независимых значений случайной величины α , равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$.

Стандартный метод моделирования дискретной случайной величины основан на следующем соотношении:

$$P\left(\sum_{k=0}^{m-1} P_k \leq \alpha < \sum_{k=0}^m P_k\right) = P_m, \quad (I)$$

где $P_m = P(\xi = x_m)$, $m = 0, 1, \dots$.

Наиболее важными дискретными случайными величинами являются целочисленные с распределением:

$P_k = P(\xi = k)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) связанным простыми рекуррентными формулами:

$$P_{k+1} = P_k \cdot r(k).$$

Упражнение. Найти рекуррентную формулу:

1. Для биномиального распределения с параметрами p, n ;

$$P_k = P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

2. Для распределения Пуассона с параметром λ ;

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

3. Для геометрического распределения с параметром p ;

$$P_k = p \cdot (1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

4. Для гипергеометрического распределения;

$$P_k = \frac{C_{n_1}^k \cdot C_{n-n_1}^{l-k}}{C_n^l},$$

$$\max(0, n_1 + l - n) \leq k \leq \min(n_1, l).$$

Стандартный метод моделирования непрерывной случайной величины связан с формулой вида $\xi = \varphi(\alpha)$, где $\varphi(y)$ - строго монотонная и непрерывная функция на интервале $(0, 1)$; для ξ задана плотность распределения $f(x)$ ($a < x < b$, границы a, b могут быть и бесконечными).

Предположим, что $\varphi(x)$ монотонно возрастает, и найдем функцию распределения для $\eta = \varphi(\alpha)$:

$$F_\eta(x) = \int_a^x f_\eta(t) dt = P(\varphi(\alpha) < x) = P(\alpha < \varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(x).$$

Для каждой случайной величины $\xi(\omega)$ однозначно определяется функция распределения

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\},$$

представляющая собой монотонно неубывающую, неотрицательную непрерывную слева функцию такую, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1.$$

Если $R = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ - совокупность случайных величин, определенных на (Ω, \mathcal{U}, P) , то есть векторная случайная величина, то функция $F_R(x_1, \dots, x_s) = P(\bigcap_{i=1}^s \{\omega: \xi_i(\omega) < x_i\})$ называется совместной функцией распределения величин ξ_1, \dots, ξ_s или функцией распределения векторной случайной величины R . Она однозначно определена в S - мерном евклидовом пространстве, монотонно не убывает и непрерывна слева по каждой из переменных. Кроме того

$$\lim_{\substack{x_k \rightarrow -\infty \\ 1 \leq k \leq s}} F_R(x_1, \dots, x_s) = 0$$

и

$$\lim_{x_{i+1}, \dots, x_s \rightarrow \infty} F_R(x_1, \dots, x_i, \dots, x_s) = F_{R_i}(x_1, \dots, x_i),$$

где $R_i = (\xi_1, \dots, \xi_i)$,

так что $F_{R_i}(x_1, \dots, x_i)$ представляет собой функции распределения векторной случайной величины R_i .

Если имеет смысл интеграл

$$\int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\xi}(x),$$

то его называют математическим ожиданием случайной величины ξ и обозначают $M\xi$. Если μ - конечная мера, абсолютно непрерывная по отношению к вероятностной мере P , то производную Радона-Никодима $dP/d\mu(\omega)$ называют плотностью распределения P по отношению к мере μ . В частности, если μ - мера Лебега и почти всюду существует обычная производная $dF_{\xi}(x)/dx = p_{\xi}(x)$,

то ее называют плотностью распределения или плотностью вероятности случайной величины ξ . Для многомерной случайной величины плотность совместного распределения определяется равенством

$$P_R(x_1, \dots, x_s) = \frac{\partial^s F_R(x_1, \dots, x_s)}{\partial x_1 \dots \partial x_s}$$

для почти всех x_1, \dots, x_s .

IV. Случайные процессы.

Понятие случайного процесса является непосредственным обобщением понятия случайной величины. Пусть θ - некоторый параметр, принимающий значения из множества Θ . Функция $\xi(\theta, \omega)$, определенная на Θ как функция θ и на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{U}, P) как функция ω такая, что при каждом фиксированном значении θ из Θ $\xi(\theta, \omega)$ является случайной величиной, называется случайным процессом. Обычно предполагается, что Θ есть множество вещественной прямой. Если Θ - множество более сложной природы, то $\xi(\theta, \omega)$ называют случайной функцией или случайным полем.

Функция параметра θ , равная при каждом фиксированном θ величине $M\xi(\theta, \omega)$, называется математическим ожиданием или средним значением случайного процесса.

Случайный процесс $\xi(\theta) = \xi(\theta, \omega)$ называется стационарным, если связанные с ним распределения вероятностей не зависят от сдвига параметра θ . Если все конечномерные распределения процесса нормальны, то процесс называется гуссовским случайным процессом.

Марковским случайным процессом называется процесс, для условных конечномерных распределений которого с вероятностью 1 выполняются равенства

$$P\{\xi(\theta_n) < x \mid \xi(\theta_1), \dots, \xi(\theta_{n-1})\} = P\{\xi(\theta_n) < x \mid \xi(\theta_{n-1})\}, (M)$$

для любых значений параметра $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$ из Θ .

Условие (M) эквивалентно также следующему: для любых $t_1 < t_2$ из Θ и любого x с вероятностью 1

называют простой, если она принимает на Ω не более счетного числа различных значений.

Пусть A_i - последовательность непересекающихся множеств, на которых простая функция $\eta(\omega)$ имеет постоянные значения η_i . Можно показать, что эти множества измеримы. η_i называют интегрируемой, если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| P\{A_i\} \quad \text{сходится, и величину}$$

$$\int_{\Omega} \eta(\omega) P(d\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i P\{A_i\}$$

называют интегралом простой функции η по пространству Ω . Произвольную измеримую функцию $\xi(\omega)$ можно представить как предел сходящейся последовательности простых функций для всех ω , за исключением лишь, может быть, некоторого множества ω , имеющего меру нуль, т.е.

$$\xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega \pmod{P}).$$

Обозначение $(\text{mod } P)$ будет употребляться, когда некоторое свойство выполняется для всех элементов некоторого множества, за исключением множества P -меры нуль, где P -вероятностная или \mathcal{B} -конечная мера. В этом случае говорят, что свойство выполняется для почти всех ω относительно меры P или выполняется с вероятностью 1, если P - вероятностная мера.

Интегрируемыми называют все измеримые функции $\xi(\omega)$, для которых конечна верхняя грань

$$\sup_{\eta} \int_{\Omega} |\eta(\omega)| P(d\omega)$$

по всем простым функциям η , для которых $|\eta| < |\xi|$. Интеграл $\int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$ определяется далее как предел интегралов от простых функций η_n таких, что $\eta_n(\omega)$ сходится для всех $(\text{mod } P)$ ω к $\xi(\omega)$ и $|\eta_n| \leq |\xi|$. Интеграл по произвольному множеству A из \mathcal{U} (неопре-

деленный интеграл) существует, если интегрируема функция $\xi \cdot \varphi_A$, где φ_A - индикатор множества A , т.е.

$$\varphi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases}$$

и

$$\int_A \xi(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} \xi(\omega) \varphi_A(\omega) P(d\omega).$$

Для определенного таким образом интеграла выполняются обычные свойства интеграла Лебега по конечному промежутку.

Если \mathcal{B} - конечная мера $\mu(A)$ ($A \in \mathcal{U}$) допускает представление в виде

$$\mu(A) = \int_A f(\omega) P(d\omega), \quad (*)$$

где f - неотрицательная интегрируемая функция, то $f(\omega)$ называют производной Радона-Никодима меры μ по мере P и употребляют обозначение

$$f(\omega) = \frac{d\mu}{dP}(\omega). \quad (**)$$

Согласно теореме Радона-Никодима для заданных \mathcal{B} - конечных мер μ и P производная $f(\omega)$ существует, т.е. имеет место представление (*), в том и только в том случае, если μ абсолютно непрерывна по отношению к P ($\mu \ll P$), т.е. из равенства $P(A) = 0$, $A \in \mathcal{U}$, следует $\mu(A) = 0$.

III. Случайные величины и функции распределения.

Пусть (Ω, \mathcal{U}, P) - вероятностное пространство. Множества A из \mathcal{U} называют событиями, а величины $P(A)$ их вероятностями.

Случайной величиной, определенной на этом пространстве, называется произвольная \mathcal{U} - измеримая вещественная функция $\xi(\omega)$, принимающая конечные $(\text{mod } P)$ значения. Случайные величины, отличающиеся на множестве P -меры нуль, считаются равными.

$$P(|S_N/N - a| > \varepsilon) \leq \sigma^2 / (N\varepsilon^2).$$

Отсюда, если мы зададим некоторое достаточно малое γ и положим $\gamma = \sigma^2 / (N\varepsilon^2)$ (т.е. $\varepsilon = \sigma / \sqrt{N\gamma}$), то получим

$$P\left\{\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i - M\xi\right| < \frac{\sigma}{(N\gamma)^{1/2}}\right\} > 1 - \gamma,$$

то есть с вероятностью $1 - \gamma$ среднее арифметическое независимых реализаций ξ отличается от $M\xi$ не более чем на $\sigma / \sqrt{N\gamma}$. При фиксированных γ и σ погрешность убывает, таким образом, как $(N)^{-1/2}$.

Если для оценки погрешности используется центральная предельная теорема, то при достаточно большом N величину $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i$ можно считать распределенной нормально со средним $M\xi$ и дисперсией σ^2/N , что дает возможность построить доверительный интервал и оценить погрешность. При этом необходимо, чтобы распределение величины $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i$ отличалось от нормального не более чем на величину порядка $N^{-1/2}$. Величина дисперсии, которой определяется погрешность, может быть также оценена в процессе вычислений. Таким образом, имеется возможность определить в процессе вычислений число N , гарантирующее необходимую точность с заданной вероятностью. Эта особенность метода представляется весьма важной в практическом отношении. Эта задача связана с задачей оценки параметров нормального распределения. При этом оценка математического ожидания дает решение задачи, а оценка дисперсии обеспечивает оценку погрешности. Преобразования, сохраняющие математическое ожидание случайной величины, но изменяющие (уменьшающие) ее дисперсию, будем называть модификациями метода Монте-Карло.

Следующие задачи: вычислить математическое ожидание случайной величины при условии, что ее второй момент бесконечен; оценить математическое ожидание зависимых случайных величин; и другие нами здесь не будут рассмотрены. Сходимость метода Монте-Карло является сходимостью по

вероятности.

Цепи Маркова и связанные с ними алгоритмы

Мы ниже дадим некоторые основные понятия теории вероятностей.

I. Вероятностное пространство. Вероятностное пространство обычно задается в виде (Ω, \mathcal{U}, P) , где:

1) Ω - некоторое заданное множество, называемое пространством элементарных исходов; его элементы называют также точками.

2) \mathcal{U} - непустое множество подмножеств Ω , являющееся σ -алгеброй, то есть замкнутым относительно операции суммирования (объединения) счетного числа своих элементов, счетного пересечения и дополнения множеством; предполагается, что Ω (и \emptyset) является элементом \mathcal{U} ;

3) P - вероятностная мера, то есть неотрицательная функция множеств из \mathcal{U} такая, что $P(\Omega) = 1$ и $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, где A_i - последовательность попарно непересекающихся множеств из \mathcal{U} . Кроме вероятностной меры, часто полезно рассматривать конечную меру $\bar{\mu}$, отличающуюся от вероятностной лишь нормировкой $\bar{\mu}(\Omega) = \text{const} < \infty$, и μ - конечную меру μ для которой $\mu(\Omega)$ может иметь бесконечное значение, но все пространство Ω допускает представление в виде суммы счетного числа множеств A_i обладающих конечной мерой ($\mu(A_i) < +\infty, i=1,2,\dots$)

II. Измеримые функции, интеграл, производная.

Введение меры на σ -алгебре \mathcal{U} позволяет сразу же определить интеграл на пространстве Ω от измеримой вещественной функции по схеме, вполне аналогичной схеме определения интеграла Лебега.

Функцию $\xi(\omega), (\omega \in \Omega)$ называют \mathcal{U} -измеримой, если множество $\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ принадлежит \mathcal{U} для любого вещественного числа x . Измеримую функцию

Составитель: Шакенов К.К. Методы Монте-Карло и их приложение. Методическая разработка. - Алматы: изд.КазГУ, 1993, с.49.

Рецензент: Аканбаев Н.Е.

С Казахский государственный
Национальный университет
им. аль-Фараби, 1993.

ВВЕДЕНИЕ

Суть метода Монте-Карло заключается в том, что моделируются некоторые случайные величины с известными законами распределения, и из этих величин по известным правилам конструируются существенно более сложные, распределение, которых уже не может быть найдено аналитически. Эти результирующие распределения могут быть известны с точностью до параметров - в этом случае используется аппарат математической статистики для оценивания этих параметров. В других случаях, когда вид результирующего распределения неизвестен, используются непараметрические методы. Отметим, что предельные теоремы теории вероятностей играют важную роль при разработке вычислительных схем метода Монте-Карло.

Задача метода Монте-Карло после получения ряда реализаций интересующей нас случайной величины ξ (с помощью более простой случайной величины α) заключается в получении некоторых сведений о ее распределении, т.е. является типичной задачей математической статистики. При этом наиболее распространенной вычислительной задачей является задача оценки среднего значения некоторой случайной величины, т.е. задача вычисления интеграла типа Лебега по некоторой (конструктивной) вероятностной мере.

Наиболее изучен случай, когда существует конечный второй момент случайной величины. Самая простая вычислительная схема при этом заключается в следующем.

Вычисляется N независимых реализаций случайной величины, и ее математическое ожидание оценивается с помощью среднего арифметического этих реализаций. Основанием для этого может служить тот факт, что среди линейных несмещенных оценок среднее арифметическое имеет наименьшую дисперсию. Оценка погрешности может быть получена с помощью неравенства Чебышева и имеет вероятностный характер. Известно, что для независимых и одинаково распределенных случайных величин ξ_1, \dots, ξ_N и $M\xi_k = a < \infty$, $D\xi_k = \sigma^2 < \infty$ ($k=1, 2, \dots, N$) и для $S_N = \sum_{k=1}^N \xi_k$ неравенство Чебышева, любого $\epsilon > 0$ имеет вид:

$$P(|S_N/N - a| \leq \epsilon) \geq 1 - \sigma^2 / (N\epsilon^2) \quad \text{или}$$

КАЗАХСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. АЛЫ-ШАРАБИ

МЕТОДЫ ЭКГ-КАРДИО И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ
Методическая разработка

АЛМАТЫ, 1993

40 тенге

777 157 1965 Сенжол

777 22 390 14 - Кудат

КАЗАХСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. АЛЬ-ФАРАБИ

МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

Методическая разработка

АЛМАТЫ, 1993

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы, изд. 2-е, допол., М.: "Наука", 1975.
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование, изд. 2-е, допол., М.: "Наука", 1982.
3. Соболев И.М. Метод Монте-Карло, изд. 4-е допол., переработ., М.: "Наука", 1985.
4. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: "Наука", 1973.
5. Бусленко Н.П., Голенико Д.И., Соболев И.М., Срагович В.Г., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), СМБ, М.: Физматгиз, 1962.
6. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация в цифровых машинах. М.: Физматгиз, 1961.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
§ 1. Моделирование некоторых случайных величин и векторов	10
§ 2. Вычисление определенного интеграла	16
§ 3. Цепи Маркова с конечным числом состояний и решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	24
§ 4. Решение интегральных уравнений	30
Приложение	46

ОТВЕТЫ :

1. $r(k) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$

2. $r(k) = \frac{\lambda}{k+1}$

3. $r(k) = 1-p$

4. $r(k) = \frac{(n_2-k)(l-k)}{(k+1)(n-n_2-l+1+k)}$

5. $F(x) = 1 - e^{-5x}, \xi = -5^{-1} \ln \alpha$

6. $\xi = -\frac{1}{a} \ln(1-\alpha) = -\frac{1}{a} \ln(\alpha)$

7. $\xi = a + \alpha(b-a)$

9. Указание: показать, что

a) $p(x) \geq 0, x \in (0, \pi),$

b) $\int_0^{\pi/2} p(x) dx = 1$

10. Указание: 1) построить графики функций

$p_1(x) = 2/\pi, p_2(x) = 8x/\pi^2, p_3(x) = 24x^2/\pi^3,$

$f(x) = \xi \ln(x), x \in (0, \pi/2).$

2) используя формулу (16) вычислить дисперсии для всех $p_i(x), i=1,2,3$ с одинаковыми N .

ПРИЛОЖЕНИЕ

ГЕНЕРАТОРЫ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ И МАССИВОВ

Подпрограмма URAND(IY)

REAL FUNCTION URAND(IY)

INTEGER IY

INTEGER IA, IC, ITWO, M2, M, MIC

DOUBLE PRECISION HALFM

REAL S

DOUBLE PRECISION DATAN, DSQRT

DATA M2/0/, ITWO/2/

IF(M2.NE.0) GO TO 90

M=1

80 M2=M

M=ITWO*M2

IF(M.GT.M2) GO TO 80

HALFM=M2

IA=8*IDINT(HALFM*DATAN(1.D0)/8.D0)+5

IC=2*IDINT(HALFM*(0.5D0-DSQRT(3.D0)/6.D0))+1

MIC=(M2-IC)+M2

S=0.5/HALFM

90 IY=IY*IA

IF(IY.GT.MIC) IY=(IY-M2)-M2

IY=IY+IC

IF(IY/2.GT.M2) IY=(IY-M2)-M2

IF(IY.LT.0) IY=(IY+M2)+M2

URAND=FLOAT(IY)*S

RETURN

END

Пример.

IY=0

R=URAND(IY)

вылетит, испытав хотя бы одно столкновение.

Переходная плотность для цепи столкновений определяется формулой

$$k(y, x) = q e^{-(x-y)}, \quad y \leq x \leq H.$$

Плотность первичных столкновений $f(x) = e^{-x}$, ($0 \leq x \leq H$). Следовательно, суммарная плотность столкновений $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = q \int_0^x e^{-(x-y)} \varphi(y) dy + e^{-x}.$$

Легко проверить, что здесь $\|K\| < q$. Известно, что в данном случае искомая вероятность $P = \varphi(H)$. Таким образом, требуется вычислить решение интегрального уравнения в одной точке $x = H$. Для этого можно использовать локальную оценку, положив $h(x) = k(x, H) = q \cdot e^{-(H-x)}$, т.е. $P = M \xi$, где $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} h(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} q \cdot e^{-(H-x_n)}$, если реализуется прямое моделирование цепи столкновений. Непосредственной подстановкой в уравнение можно убедиться, что здесь

$$\varphi(x) = e^{-(1-q)x}, \quad 0 \leq x \leq H.$$

Отсюда получим

$$P = \varphi(H) = (\varphi, h) = e^{-(1-q)H} (1 - e^{-qH}).$$

Сопряженное уравнение в данном случае имеет вид

$$\varphi^*(x) = q \int_x^H e^{-(y-x)} \varphi^*(y) dy + q \cdot e^{-(H-x)}$$

Ему удовлетворяет функция

$$\varphi^*(x) = q e^{-(1-q)(H-x)}$$

Дисперсия случайной оценки ξ определяется равенством

$$M \xi^2 = (\varphi, h(2\varphi^* - h)) = q^2 \frac{1+2q}{1+q} e^{-(1-q)H} - 2q^2 e^{-H} + \frac{q^2 e^{-2H}}{1+q}.$$

Рассмотрим теперь оценку по поглощениям

$$\eta = \frac{h(x_N)}{g(x_N)} = \frac{q e^{-(H-x_N)}}{1-q + q e^{-(H-x_N)}}$$

Для нее

$$M \eta^2 = (\varphi, \frac{h^2}{g}) = q^2 e^{-(1-q)H} \int_0^H \frac{e^{-(1+q)x}}{1-q + q e^{-x}} dx.$$

В данном случае можно рассматривать еще двоичную оценку ξ_1 которая равна 1, если частица вылетела, и равна 0 в противном случае. Очевидно, что

$$M \xi_1^2 = M \xi_1 = P = e^{-(1-q)H} (1 - e^{-qH}).$$

Для сравнения дисперсий оценок при большом H достаточно рассмотреть соответствующие коэффициенты при функции $e^{-(1-q)H}$, т.е. величины

$$C_{\xi} = q^2 \frac{1+2q}{1+q}, \quad C_{\eta} = q^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-(1+q)x}}{1-q + q e^{-x}} dx,$$

$$C_{\xi_1} = 1.$$

Задача. Сравнить значения коэффициентов $C_{\xi}, C_{\eta}, C_{\xi_1}$ при $q = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$. Исследовать точности оценок.

которая является несмещенной (то есть $M_h \eta = I_h$), если $g(x) \neq 0$ при $h(x) \neq 0$.

$$D\eta = \left(X, \frac{h^2}{g} \right) - I_h^2,$$

где X определяется так же, как в (12).

4. "Идеальная" цепь Маркова определяется функциями

$$f(x) = \frac{f(x)\varphi^*(x)}{(f, \varphi^*)}, \quad p(y, x) = \frac{k(y, x)\varphi^*(x)}{\varphi^*(y)}$$

Для этой цепи должны быть $k(y, x) \geq 0$, $f(x) \geq 0$, $h(x) \geq 0$. "Идеальная" оценка имеет нулевую дисперсию.

Оценка типа ξ с нулевой дисперсией.

Предположим, что функции $k(y, x)$, $f(x)$, $h(x)$ неотрицательны и $[K^* \varphi^*](x) = \varphi^*(x) - h(x) > 0$ для любого $x \in \Omega$.

Теорема 2. Если

$$f(x) = \frac{f(x)\varphi^*(x)}{(f, \varphi^*)}, \quad p(y, x) = \frac{k(y, x)\varphi^*(x)}{[K^* \varphi^*](y)}, \quad (13)$$

то $D\xi = 0$, $M\xi = I_h$.

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [1].

Функция $\varphi^*(x)$ называют функцией ценности на основании выражения (11). Поэтому алгоритмы метода Монте-Карло, близкие к рассмотренному идеальному, принято называть моделированием по ценности.

Но отметим, что реализация оценки с нулевой дисперсией невозможно по следующим причинам:

1) Функция φ^* неизвестна. 2) вследствие того, что $g \equiv 0$ необходимо моделировать бесконечные цепочки. Поэтому на практике используют приближенное моделирование

по ценности, основанное на замене в характеристиках цепи (13) функции φ^* на функцию $\rho \approx \varphi^*$ (замечательным свойством получаемого алгоритма является его независимость от постоянного множителя функции ρ). Кроме того, начиная с m -го состояния вводят поглощение с вероятностью, обеспечивающей обрыв траектории с вероятностью 1 . Можно получить оценку величины $D\xi$ при следующих предположениях:

$$\rho = c(1+\varepsilon)\varphi^*, \quad |\varepsilon(x)| \leq \delta < 1, \quad \text{где } c = \text{const},$$

$$g(x) \leq \delta_g, \quad g(x) = 0 \quad \text{при } h \leq m,$$

$$q' = \|K\| \frac{1+\delta}{(1-\delta)(1-\delta_g)} < 1. \quad \text{Тогда}$$

$$D\xi = \frac{2I_h \|f\| \|\varphi^*\| (1+\delta)^2 \left(\frac{2\delta}{1-\delta} + \frac{\delta_g}{1-\delta_g} \cdot \frac{1+\delta}{1-\delta} \right) \times$$

$$\times \frac{1+q}{1-q} + \delta_g \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^2 \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \cdot q \right)^m, \quad q = \|K\|.$$

Отметим, что трудоемкость методов Монте-Карло определяется величиной $S = t \cdot D\xi$, где t - среднее время расчетов на ЭВМ для получения одного выборочного значения ξ .

Пример решения интегрального уравнения методом Монте-Карло.

Для исследования эффективности различных модификаций моделирования процесса переноса излучения с сильно анизотропным рассеянием можно использовать следующую модель процесса. Частица движется из точки $x=0$ вдоль оси x случайными пробегами, распределенными с плотностью $e^{-\alpha x}$ ($x > 0$). В конце пробега происходит столкновение, в результате которого частица может проглотиться с вероятностью $1-q$; в противном случае она движется дальше. В точке $x=N$ происходит вылет, то есть обрыв траектории. Требуется вычислить вероятность P того, что частица

которая является несмещенной (то есть $M_h \eta = I_h$), если $g(x) \neq 0$ при $h(x) \neq 0$.

$$D\eta = \left(X, \frac{h^2}{g} \right) - I_h^2,$$

где X определяется так же, как в (I2).

4. "Идеальная" цепь Маркова определяется функциями

$$p(x) = \frac{f(x)\varphi^*(x)}{(f, \varphi^*)}, \quad p(y, x) = \frac{k(y, x)\varphi^*(x)}{\varphi^*(y)}$$

Для этой цепи должны быть $k(y, x) \geq 0, f(x) \geq 0, h(x) \geq 0$. "Идеальная" оценка имеет нулевую дисперсию.

Оценка типа ξ с нулевой дисперсией.

Предположим, что функции $k(y, x), f(x), h(x)$ неотрицательны и $[k^* \varphi^*](x) = \varphi^*(x) - h(x) > 0$ для любого $x \in \Omega$.

Теорема 2. Если

$$p(x) = \frac{f(x)\varphi^*(x)}{(f, \varphi^*)}, \quad p(y, x) = \frac{k(y, x)\varphi^*(x)}{[k^* \varphi^*](y)}, \quad (I3)$$

то $D\xi = 0, M\xi = I_h$.

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [I].

Функция $\varphi^*(x)$ называют функцией ценности на основании выражения (II). Поэтому алгоритмы метода Монте-Карло, близкие к рассмотренному идеальному, принято называть моделированием по ценности.

Но отметим, что реализации оценки с нулевой дисперсией невозможно по следующим причинам:

1) Функция φ^* неизвестна, 2) вследствие того, что $g \equiv 0$ необходимо моделировать бесконечные цепочки. Поэтому на практике используют приближенное моделирование

по ценности, основанное на замене в характеристиках цепи (I3) функции φ^* на функцию $\rho \approx \varphi^*$ (замечательным свойством получаемого алгоритма является его независимость от постоянного множителя функции ρ). Кроме того, начиная с m -го состояния вводят поглощение с вероятностью, обеспечивающей обрыв траектории с вероятностью 1 . Можно получить оценку величины $D\xi$ при следующих предположениях:

$$\rho = c(1+\varepsilon)\varphi^*, \quad |\varepsilon(x)| \leq \delta < 1, \quad \text{где } c = \text{const},$$

$$g(x) \leq \delta_g, \quad g(x) = 0 \quad \text{при } h \leq m,$$

$$q' = \|K\| \frac{1+\delta}{(1-\delta)(1-\delta_g)} < 1. \quad \text{Тогда}$$

$$D\xi = \frac{2I_h \|f\| \|\varphi^*\| (1+\delta)^2}{1-q'} \left(\left(\frac{2\delta}{1-\delta} + \frac{\delta_g}{1-\delta_g} \cdot \frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^m \right)^2$$

$$\times \frac{1+q}{1-q} + \delta_g \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^2 \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \cdot q \right)^m, \quad q = \|K\|.$$

Отметим, что трудоемкость методов Монте-Карло определяется величиной $S = t \cdot D\xi$, где t - среднее время расчетов на ЭВМ для получения одного выборочного значения ξ .

Пример решения интегрального уравнения методом Монте-Карло.

Для исследования эффективности различных модификаций моделирования процесса переноса излучения с сильно анизотропным рассеянием можно использовать следующую модель процесса. Частица движется из точки $x=0$ вдоль оси x случайными пробегами, распределенными с плотностью e^{-x}

($x > 0$). В конце пробега происходит столкновение, в результате которого частица может проглотиться с вероятностью $1-q$; в противном случае она движется дальше. В точке $x=H$ происходит вылет, то есть обрыв траектории. Требуется вычислить вероятность P того, что частица

которое дает возможность оценить методом Монте-Карло решение сопряженного уравнения в заданной точке. Равенство (II) можно строго доказать (аналогично доказательству теоремы), используя разложение φ^* в ряд Неймана:

$$\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} (K^*)^n h.$$

Выражение (II) используется в теории методов Монте-Карло для вычисления дисперсии оценок и построения оценок нелинейных функционалов вида $(\varphi, \varphi^* \chi)$, в частности, функционалов теории возмущений.

Дисперсия основной оценки.

Для неотрицательных $f(x)$, $h(x)$, $k(y, x)$ имеет место следующее выражение дисперсии основной оценки:

$$D_{\xi} = (\chi, h(2\varphi^* - h)) - I_h^2, \quad (I2)$$

где χ - ряд Неймана для уравнения

$$\psi(x) = \int_{\Omega_1} \frac{k^2(y, x) \psi(y)}{\rho(y, x)} dy + \frac{f^2(x)}{g(x)}.$$

Если ряд расходится, то указанная дисперсия бесконечна. Выражение (I2) нетрудно получить путем соответствующего объединения членов двойной суммы, выражающей ξ^2 , и повторного осреднения этих членов с учетом (II). Таким образом справедливо утверждение:

Если выполняются условия (7), $\|K_1^l\| < 1$ при некотором l , $D_{\xi_1} < +\infty$, то дисперсия выражается формулой (I2).

Замечания.

I. Оценку решения в заданной точке можно получить на основе выражения

$$\varphi(x) = f(x) + M \sum_{n=0}^N Q_n^* f(x_n),$$

рассматривая исходное уравнение как сопряженное к $\varphi^* = K^* \varphi^* + h$. Однако не всегда удается подобрать удобную цепь Маркова для сопряженного уравнения; кроме того, последнее соотношение позволяет оценить $\varphi(x)$ только в одной точке. Для построения более эффективной локальной оценки достаточно записать интегральное уравнение $\varphi = K\varphi + f$ следующим образом:

$$\varphi(x) = (\varphi, h_x) + f(x),$$

где $h_x(y) = k(y, x)$. Отсюда

$$\varphi(x) = M \sum_{n=0}^N Q_n k(x_n, x) + f(x)$$

Это выражение дает возможность оценить $\varphi(x)$ сразу в нескольких точках. Локальные оценки для задач теории переноса были предложены и разработаны советскими и американскими учеными.

2. Если $f(x) \geq 0$, $\int_{\Omega} f(x) dx = 1$, $k(y, x) \geq 0$, $\int_{\Omega} k(x, y) dy \leq 1$ то, полагая $\chi(x) = f(x)$, $\rho(y, x) = k(y, x)$ получаем $Q_n = 1$ ($n = 0, 1, \dots$), $\xi = \sum_{n=0}^N h(x_n)$.

Ядра такого типа называются субстохастическими. Они появляются, когда в основе задачи лежит марковская цепь, например, цепь столкновений частицы с веществом. Последний алгоритм представляет собой прямое моделирование цепи.

Дисперсии оценок прямого моделирования всегда конечны, так как в этом случае $\chi = \varphi$.

3. Оценка по поглощениям

$$\varphi = \frac{Q_n k(x_n)}{g(x_n)},$$

$$\begin{aligned}
 M(\Delta_n, Q_n, h(x_n)) &= M_{(x_0, \dots, x_n)} M(\Delta_n Q_n h(x_n) | x_0, \dots, x_n) = \\
 &= M_{(x_0, \dots, x_n)} (Q_n h(x_n) M(\Delta_n | x_0, \dots, x_n)) = \\
 &= M_{(x_0, \dots, x_n)} (Q_n h(x_n) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - g(x_k))) = \\
 &= \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} h(x_n) \mathcal{G}(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} k(x_k, x_{k+1}) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k(x_k, x_{k+1})}{\rho(x_k, x_{k+1})} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \frac{f(x_0)}{\mathcal{G}(x_0)} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - g(x_k)) dx_0 dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(x_0) h(x_n) \prod_{k=0}^{n-1} k(x_k, x_{k+1}) dx_0 \dots dx_n = (K^n f, h).$$

Учитывая (9), можно констатировать, что для неотрицательных функций $k(y, x)$, $h(x)$ и $f(x)$ теорема доказана. В последних выкладках было использовано очевидное соотношение

$$\begin{aligned}
 M(\Delta_n | x_0, \dots, x_n) &= P(\Delta_n = 1 | x_0, \dots, x_n) = \\
 &= P(\delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_n = 1 | x_0, \dots, x_n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - g(x_k)).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь общий случай знакопеременных $k(y, x)$, $f(x)$ и $h(x)$. Пусть Q_n^{\pm} - веса для задачи со следующими функциональными характеристиками:

$$k_+(y, x) = |k(y, x)|, f_+(x) = |f(x)|, h_+(x) = |h(x)|.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
 |\eta_m| &= \left| \sum_{n=0}^m \Delta_n Q_n h(x_n) \right| \leq \sum_{n=0}^m |\Delta_n Q_n h(x_n)| = \\
 &= \sum_{n=0}^m \Delta_n Q_n^{\pm} h_+(x_n) = \eta_m^{\pm} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n Q_n^{\pm} h_+(x_n) = \xi_{\pm}.
 \end{aligned}$$

В силу сделанных предположений величина $M \xi_{\pm} = (\varphi_{\pm}, h_{\pm})$ конечна (здесь $\varphi_{\pm} = K_{\pm} \varphi_{\pm} + f_{\pm}$). Таким образом, сходящаяся (с вероятностью 1) к ξ последовательность случайных величин абсолютно мажорируется монотонно возрастающей последовательностью η_m^{\pm} математическое ожидание предела которой конечно. По теореме Лебега в этом случае

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M \eta_m = M(\lim_{m \rightarrow \infty} \eta_m) = M \xi$$

Но

$$M \eta_m = M \sum_{n=0}^m \Delta_n Q_n h(x_n) = \sum_{n=0}^m M(\Delta_n Q_n h(x_n)) = \sum_{n=0}^m (K^n f, h).$$

так как соотношение $M(\Delta_n Q_n h(x_n)) = (K^n f, h)$ является обшим. Следовательно

$$M \xi = \lim_{m \rightarrow \infty} M \eta_m = \sum_{n=0}^{\infty} (K^n f, h) = I_h.$$

Последний ряд конечен и равен I_h , так как

$$\|K^n\| \leq \|K_1^n\| < 1.$$

Теорема доказана полностью.

Заметим, что формально подставляя в выражение

$$M \xi = M \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n h(x_n) \right) = (\varphi, h) = (f, \varphi^*) \quad (10)$$

обобщенные функции $f(y) = \delta(y-x)$, $\mathcal{G}(y) = \delta(y-x)$ и полагая $Q_0 = 1$, приходим к выражению

$$\varphi^*(x) = h(x) + M \sum_{n=1}^{\infty} Q_n h(x_n) \quad (11)$$

Основная оценка функционала (φ, h) . Доказательство несмещенности.

Пусть необходимо оценить величину $I_h = (\varphi, h)$, где $\varphi = K\psi + f$, причем для интегрального оператора K выполняется условие, обеспечивающее сходимость ряда Неймана: $\|K^l\| < 1$. Определим цепь Маркова начальной плотностью $\mathcal{P}(x)$ и переходной плотностью $\rho(y, x)$; N - случайный номер последнего состояния. Введем вспомогательные случайные веса Q_n по формулам

$$Q_0 = \frac{f(x_0)}{\mathcal{P}(x_0)}, \quad Q_n = Q_{n-1} \cdot \frac{k(x_{n-1}, x_n)}{\rho(x_{n-1}, x_n)}$$

Рассмотрим случайную величину

$$\xi = \sum_{n=0}^N Q_n h(x_n)$$

Нашей целью является вывод соотношения $M\xi = I_h = (\varphi, h)$ при некоторых ограничениях на функции $\mathcal{P}(x)$, $\rho(y, x)$ и $g(x)$. Характер этих ограничений совершенно ясен: траектории цепи должны иметь возможность начинаться в тех точках, где $f(x) \neq 0$, а при переходе $y \rightarrow x$ попадать в точки, где $k(y, x) \neq 0$. Это означает, что должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) \neq 0 & \quad \text{при} \quad f(x) \neq 0, \\ \rho(y, x) \neq 0 & \quad \text{при} \quad k(y, x) \neq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

Случайная величина ξ наиболее часто используется на практике для оценки функционалов $I_h = (\varphi, h)$ (например, при решении задач теории переноса). Поэтому она называется основной оценкой I_h . Следующая теорема дает обоснование несмещенности этой оценки при сделанных предположениях. Для ее формулировки и доказательства потре-

буется вспомогательный интегральный оператор K_1 с ядром

$$k_1(y, x) = |k(y, x)|$$

Теорема I. Если выполняются условия (7) и $\|K_1^l\| < 1$ при некотором натуральном l , то

$$M\xi = M \sum_{n=0}^N Q_n h(x_n) = I_h = (\varphi, h).$$

Доказательство. Прежде всего дополним сумму, выражающую оценку, до бесконечной, после чего ее можно будет осреднить почленно. Будем считать цепь бесконечной, но введем еще одну координату состояния δ_n ($n=1, 2, \dots$), которую положим равной нулю, если произошел обрыв при переходе $x_{n-1} \rightarrow x_n$, и единице, если обрыва не было; $\delta_0 = 1$. Далее, пусть

$$\Delta_n = \prod_{k=0}^n \delta_k$$

Таким образом, Δ_n равно 1 до первого обрыва и 0 после него. Следовательно, можно записать

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n Q_n h(x_n) \quad (8)$$

Предположим временно, что функции $k(y, x)$, $f(x)$, $h(x)$ неотрицательны. Известно, что ряд, члены которого суть неотрицательные случайные величины, можно осреднять почленно. Поэтому

$$M\xi = \sum_{n=0}^{\infty} M(\Delta_n Q_n h(x_n)) \quad (9)$$

Для вычисления n -го члена последней суммы применим формулу полного математического ожидания:

называют последовательность случайных величин x_0, x_1, \dots, x_n связанных простейшей зависимостью, при которой распределение x_n определяется x_{n-1} при любом $n=1, 2, \dots$, причем условная плотность распределения x_n при условии $x_{n-1} = y$ для любого n равна заданной функции $r(y, x)$ и не зависит от номера n . Функцию $r(y, x)$ называют плотностью вероятностей перехода и обозначают иногда еще так: $r(y \rightarrow x)$. Распределение начального состояния x_0 задано начальной плотностью $\mathcal{T}(x)$. Понятие однородной цепи Маркова можно расширить введя вероятность обрыва $g(y)$ траектории при переходе $y \rightarrow x$. Функцию $p(y, x) = r(y, x)(1-g(y))$ будем называть переходной плотностью; заметим, что

$$\int_{\Omega} p(y, x) dx = 1 - g(y) \leq 1.$$

Случайный номер последнего состояния, непосредственно предшествующего обрыву (иначе поглощению), будем обозначать символом N . Решение интегральных уравнений методом Монте-Карло связано с моделированием цепей Маркова, которые тем самым должны обрываться с вероятностью 1 через конечное (хотя и случайное) число переходов. Более того, математическое ожидание $M(N)$ должно быть конечным. Теперь покажем, при каких ограничениях на характеристики цепи Маркова математическое ожидание $M(N)$ будет конечным. Также отметим, что мы будем рассматривать цепь Маркова, определяемую начальной плотностью $\mathcal{T}(x)$ и переходной плотностью

$$p(y, x) = r(y, x)(1-g(y)).$$

Условия, достаточные для конечности среднего числа состояний $M(N)$.

Введем обозначение: K_p - интегральный оператор с ядром $p(y, x)$, действующий из L_1 в L_1 . Пользуясь формулой полной вероятности, определим вероятность события $N = n$:

$$\begin{aligned} P(N=n) &= M_{(x_0, x_1, \dots, x_n)} (P(N=n | x_0, x_1, \dots, x_n)) = \\ &= M_{(x_0, x_1, \dots, x_n)} \left(g(x_n) \prod_{k=0}^{n-1} (1-g(x_k)) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \dots \int \mathcal{T}(x_0) g(x_n) \prod_{k=0}^{n-1} (1-g(x_k)) r(x_k, x_{k+1}) dx_0 \dots dx_n = \\ &= \int \dots \int \mathcal{T}(x_0) g(x_n) \prod_{k=0}^{n-1} p(x_k, x_{k+1}) dx_0 \dots dx_n = (K_p^n \mathcal{T}, g). \quad (5) \end{aligned}$$

Очевидно, для получения вероятности $P(N \geq n)$ следует в последнем выражении заменить $g(x)$ на $\delta(x) \equiv 1$, то есть

$$P(N \geq n) = (K_p^n \mathcal{T}, \delta).$$

Далее, $P(N = \infty) \leq P(N \geq n)$,

так как $(N = \infty) \subset (N \geq n)$. Полученные соотношения показывают, что $P(N \geq n) \rightarrow 0$ и, следовательно,

$P(N = \infty) = 0$, если сходится ряд Неймана для уравнения $f = K_p f + \mathcal{T}$. Как уже было сказано выше, для этого достаточно существование такого ℓ , при котором

$$\|K_p \ell\| < 1. \quad (6)$$

Таким образом, при выполнении (6) цепь обрывается после конечного числа переходов с вероятностью 1. Оказывается, что условие (6) является достаточным и для конечности величины $M(N)$. Действительно,

$$\begin{aligned} M(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} n (K_p^n \mathcal{T}, g) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n K_p^n \mathcal{T}, g \right) = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} K_p^k \mathcal{T}, g \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} K_p^n \Psi, g \right) = (\Psi_p, g). \end{aligned}$$

Здесь, $\Psi = K_p \Psi + \mathcal{T}$, $\Psi_p = K_p \Psi_p + K_p \Psi$. При выполнении (6) имеем $\Psi, \Psi_p \in L_1$, $(\Psi_p, g) < \infty$. В частности, $M(N) < \infty$, если $g(x) \geq \varepsilon > 0$, так как при этом

$$\|K_p\| = \sup_x \int_{\Omega} p(x, y) dy = \sup_x (1-g(x)) \leq 1 - \varepsilon.$$

Рассмотрим интегральное уравнение второго рода.

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} k(y, x) \varphi(y) dy + f(x) \quad \text{или} \quad \varphi = K\varphi + f, \quad (I)$$

где Ω - n -мерное евклидово пространство, $f, \varphi \in L$, $K \in [L \rightarrow L]$, L - некоторое банахово пространство интегрируемых функций. Для многих приложений целесообразно полагать $L = L_1$, при этом

$$\|f\| = \int_{\Omega} |f(x)| dx, \quad \|K\| \leq \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |k(x, y)| dy.$$

Алгоритмы Монте-Карло основаны на представлении решения уравнения (I) рядом Неймана:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} K^n f \quad (2)$$

Оператор K^n определяется формулой

$$[K^n f](x) = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(x_0) k(x_0, x_1) \dots k(x_{n-1}, x) dx_0 \dots dx_{n-1}.$$

Известно, что ряд (2) сходится по норме и решение уравнения (I) существует, если $\|K\| < 1$. Однако, для сходимости ряда Неймана и существования решения достаточно и более слабое условие: $\|K^l\| < 1$, где l - некоторое натуральное число. Это сразу получается из рассмотрения следующего уравнения:

$$\varphi = K^l \varphi + K^{l-1} f + \dots + K f + f.$$

В дальнейшем будет использовано сопряженное к (I) уравнение

$$\varphi^* = K^* \varphi^* + h, \quad (3)$$

где $\varphi^*, h \in L^*$, $K^* \in [L^* \rightarrow L^*]$, L^* - сопряженное к L пространство функций, K^* - оператор, сопряженный к K . Напомним следующие свойства сопряженных пространств и операторов:

$$|(h, f)| \leq \|f\|_L \cdot \|h\|_{L^*},$$

$$\text{где } (f, h) = \int_{\Omega} f(x) h(x) dx, \quad \|K\| = \|K^*\|,$$

$$(K f, h) = (f, K^* h), \quad [K^* h](x) = \int_{\Omega} k(x, y) h(y) dy.$$

Заметим также, что сопряженным к L_1 является пространство L_{∞} ограниченных (почти везде) функций с нормой

$$\|h\|_{L_{\infty}} = \text{vrai} \sup |h(x)|, \quad x \in \Omega$$

Символ *vrai* означает, что при определении точной верхней границы функции $h(x)$ из Ω может быть выброшено любое множество нулевой меры Лебега.

Рассмотрим алгоритмы метода Монте-Карло для оценки функционалов вида

$$I_h = (\varphi, h) = \sum_{n=0}^{\infty} (K^n f, h). \quad (4)$$

Сходимость последнего ряда вытекает из сходимости по норме ряда Неймана для φ . Нетрудно показать, что

$$(\varphi, h) = (f, \varphi^*), \quad \text{где } \varphi^* = K^* \varphi^* + h.$$

Как уже указывалось во введении, однородной цепью Маркова

Подставляя вместо $q_{i_0}^{(0)}$ и $q_{i_{n-1}, i_n}^{(m)}$ их значения из (5) и меняя порядок суммирования, получим

$$M_{\xi_N} = \sum_{m=0}^N \sum_{i_0=1}^n \dots \sum_{i_{m-1}=1}^n h_{i_0} a_{i_0, i_1} \dots a_{i_{m-1}, i_m} \cdot f_{i_m}$$

По определению произведения матриц

$$A^2 = (a_{i_0, i_1})_{i_0, i_1=1}^n \times (a_{i_1, i_2})_{i_1, i_2=1}^n = \left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_0, i_1} a_{i_1, i_2} \right)_{i_0, i_2=1}^n,$$

$$A^m = \left(\sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{m-1}=1}^n a_{i_0, i_1} \dots a_{i_{m-1}, i_m} \right)_{i_0, i_m=1}^n$$

Отсюда следует $M_{\xi_N} = (h, \sum_{m=0}^N A^m \cdot f)$

При $N \rightarrow \infty$ M_{ξ_N} стремится к (h, \bar{x})

Это одна из возможных схем метода Монте-Карло, связанных с СЛАУ, которая заключается в вычислении средних значений случайной величины ξ_N по траекториям цепи Маркова.

Замечания.

1. Известно, что $(h, \bar{x}) = (y, f)$, где y есть решение уравнения

$$y = A^T y + h, \quad (7)$$

а A^T - матрица, транспонированная к A .

Равенство $(h, \bar{x}) = (y, f)$ легко проверяется непосредственно: $f = \bar{x} - A\bar{x}$ и $h = y - A^T y$. Тогда

$$(h, \bar{x}) = (y - A^T y, \bar{x}) = (y, \bar{x}) - (A^T y, \bar{x}) = (y, \bar{x}) - (y, A\bar{x}).$$

с другой стороны

$$(y, f) = (y, \bar{x} - A\bar{x}) = (y, \bar{x}) - (y, A\bar{x}).$$

Отсюда следует, что при вычислении скалярного произведения (h, \bar{x}) можно исходить из уравнения $y = A^T y + h$.

Марковские цепи, соответствующие обоим уравнениям, могут совпадать, если для них одновременно выполнены условия (4). Схема, связанная с уравнением (7) (сопряженная схема), более удобна, если нужно вычислять одновременно несколько скалярных произведений (h_j, \bar{x}) , $j=1, \dots, m$, так как в этом случае марковская цепь остается неизменной для всех j , а изменяется лишь случайная величина ξ_N и возможна оценка ее среднего по одним и тем же траекториям.

2. Для получения решения системы (I) достаточно взять в качестве h_j n векторов, у которых j -я компонента равна единице, а остальные равны нулю.

Как известно, Γ -й столбец матрицы $(E-A)^{-1}$ может быть получен как решение системы $x = Ax + h_\Gamma$, где h_Γ - вектор столбец с единичной Γ -й компонентой и нулевыми остальными компонентами. Поэтому при $f = h_\Gamma$ и $h = h_j$ схема, связанная с уравнением (I), дает в качестве среднего значения ξ_N элемент матрицы $(E-A)^{-1}$ с номером столбца Γ и номером строки j , а схема, связанная с уравнением (7), - элемент той же матрицы с номером строки Γ и столбца j . Разность $M_{\xi_{N+1}} - M_{\xi_N}$ есть $(h, A^{N+1}f)$ для первой из схем и $(f, (A^T)^{N+1}h)$ - для второй. Оценки этих скалярных произведений могут быть использованы для определения собственных чисел матрицы

A , коэффициентов характеристического многочлена и т.п. в соответствии с известными вычислительными схемами линейной алгебры.

3. Из равенства $\lim_{N \rightarrow \infty} M_{\xi_N} = (h, \bar{x})$ следует, что несмещенность оценки ξ_N имеет место для траекторий марковской цепи бесконечной длины.

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} + f \quad (2)$$

Если положим $x^{(0)} = f$, то

$$x^{(k)} = (A^k + A^{k-1} + \dots + A + E) \cdot f, \quad (3)$$

и точное решение системы есть

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} (E + A + \dots + A^k) f = (E - A)^{-1} \cdot f.$$

Сопоставим системе (I) цепь Маркова с n состояниями. Начальное распределение ρ и матрицу перехода \mathcal{P} (ℓ - номер перехода) подчиним некоторым дополнительным условиям, связанным с системой (I), которые сформулируем в дальнейшем, и рассмотрим задачу о вычислении скалярного произведения (h, \bar{x}) , где h - заданный вектор. Задача о вычислении одной из компонент решения \bar{x} является частным случаем этой задачи. Действительно,

$(h, \bar{x}) = \sum_{i=1}^n h_i \bar{x}_i$. Если надо вычислить только компоненту \bar{x}_j решения \bar{x} , то достаточно выбрать вектор h таким, что j -я компонента равна единице, а остальные равны нулю ($1 \leq j \leq n$).

Если одновременно вычисляется некоторое количество m скалярных произведений (\bar{h}_j, \bar{x}) , $j = 1, 2, \dots, m$, то решение системы \bar{x} может быть также получено при соответствующем выборе m и \bar{h}_j . Мы будем связывать с системой (I) и вектором h некоторую фиксированную цепь Маркова из множества цепей $\{\rho, \mathcal{P}_\ell\}$,

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n),$$

$$\mathcal{P}_\ell = (\rho_{ij}^{(\ell)})_{i,j=1}^n, \quad \sum_{i=1}^n \rho_i = 1, \quad \rho_i \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{ij}^{(\ell)} = 1, \quad \rho_{ij}^{(\ell)} \geq 0, \quad (i=1, \dots, n), (\ell=1, 2, \dots),$$

для которых выполнены условия:

1. $\rho_i > 0$, если $h_i \neq 0$
2. $\rho_{ij}^{(\ell)} > 0$, если $a_{ij} \neq 0, i, j = 1, 2, \dots, n, \ell = 1, 2, \dots$ (4)

Положим

$$q_i^{(0)} = \begin{cases} h_i / \rho_i, & \rho_i > 0, \\ 0, & \rho_i = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad q_{ij}^{(\ell)} = \begin{cases} a_{ij} / \rho_{ij}^{(\ell)}, & \rho_{ij}^{(\ell)} > 0, \\ 0, & \rho_{ij}^{(\ell)} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Зададимся некоторым целым $N > 0$ и будем рассматривать траекторию цепи Маркова длины N . Объект, описываемый цепью Маркова, мы будем часто в дальнейшем именовать частицей и считать, что эта частица изменяет свои состояния (движется) в соответствии с траекторией изменяется при движении ее по траектории $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_N$ следующим образом. В начальный момент, когда частица находится в состоянии i_0 , она имеет "вес" $Q_0 = q_{i_0}^{(0)}$, при переходе из состояния i_0 в состояние i_1 ее вес становится равным $Q_1 = q_{i_0}^{(0)} \cdot q_{i_0 i_1}^{(1)}$ и так далее, то есть

$$Q_0 = q_{i_0}^{(0)}, \quad Q_m = Q_{m-1} \cdot q_{i_{m-1} i_m}^{(m)}.$$

Введем случайную величину ξ_N , определенную на траекториях марковской цепи длины N :

$$\xi_N = \sum_{m=0}^N Q_m f_{i_m} \quad (6)$$

Каждой траектории длины N соответствует вероятность и математическое ожидание есть

$$\begin{aligned} & \rho_{i_0} \rho_{i_0 i_1}^{(1)} \dots \rho_{i_{N-1} i_N}^{(N)} \\ M \xi_N &= \sum_{i_0=1}^n \dots \sum_{i_{N-1}=1}^n \xi_N \rho_{i_0} \rho_{i_0 i_1}^{(1)} \dots \rho_{i_{N-1} i_N}^{(N)} = \\ &= \sum_{i_0=1}^n \dots \sum_{i_{N-1}=1}^n \rho_{i_0} \rho_{i_0 i_1}^{(1)} \dots \rho_{i_{N-1} i_N}^{(N)} \sum_{m=0}^N q_{i_0}^{(0)} q_{i_0 i_1}^{(1)} \dots q_{i_{m-1} i_m}^{(m)} f_{i_m} \end{aligned}$$

Тогда
$$M\eta = \int_a^b \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx = I$$

Рассмотрим N одинаковых независимых случайных величин $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$ и применим к их сумме центральную предельную теорему

$$P\left(\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i - I\right| < 3\sqrt{\frac{D\eta}{N}}\right) \approx 0.997$$

Это соотношение означает, что если мы выберем N значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, то при достаточно большом N

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(\xi_i)}{p(\xi_i)} \approx I$$

Оно показывает также, что с очень большой вероятностью погрешность приближения последнего не превосходит $3\sqrt{D\eta/N}$.

2. Для приближенного вычисления дисперсии использовать формулу

$$D\eta \approx \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{f(\xi_i)}{p(\xi_i)}\right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{f(\xi_i)}{p(\xi_i)}\right)^2 \right] \quad (16)$$

Упражнения.

8. Приблизительно вычислить интеграл $I = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$ с помощью формул (13), (14), (15) и соответствующие дисперсии по формуле (16) для $N=10, 100, 10000$; сравнить результаты.

9. Доказать, что функции $p(x) = 2/\pi$, $p(x) = 8x/\pi^2$ и $p(x) = 24x^2/\pi^3$ являются плотностями вероятностей непрерывной случайной величины ξ из $(0, \pi/2)$

10. Доказать (графически и численно) что линейная плотность ($p(x) = 8x/\pi^2$) даст лучший результат вычисления интеграла.

§ 3 Цепи Маркова с конечным числом состояний и решение систем линейных алгебраических

уравнений (СЛАУ).

Моделирование цепи Маркова с конечным числом состояний сводится к моделированию последовательности случайных величин с дискретным распределением. Процедура моделирования выглядит следующим образом.

Пусть $\{p, \mathcal{P}\}$ - однородная цепь Маркова с n состояниями, где $p = (p_1, \dots, p_n)$ - распределение вероятностей начальных состояний, а $\mathcal{P} = (P_{ij})_{i,j=1}^n$ - переходная стохастическая матрица. Для элементов матрицы \mathcal{P} выполняются соотношения

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad P_{ij} \geq 0,$$

так что ее строка с номером i представляет собой распределение вероятностей. Объем, который может находиться в n состояниях и описывается цепью Маркова, обычно рассматривается в дискретные моменты времени. Чтобы получить номер состояния в начальный момент времени, моделируют распределение вероятностей p . Затем, если объект находится в состоянии с номером i , то выбирается строка с номером i матрицы \mathcal{P} и моделируется распределение, определенное этой строкой. Таким путем строится последовательность реализаций случайных номеров состояний, образующих траекторию данной цепи Маркова.

Простейшая схема, связанная с асимптотически несмещенной оценкой решения, состоит в следующем:

Пусть СЛАУ задана в виде

$$x = Ax + f, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)'$ - вектор-столбец неизвестных,

$f = (f_1, \dots, f_n)'$ - вектор правых частей и

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ - матрица системы.

Предположим, что наибольшее по модулю собственное число $\lambda(A)$ меньше единицы, так что сходится метод последовательных приближений.

Знак равенства, согласно теореме I, достигается при

$$q(x) = q_0(x) = \frac{1}{I} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2(x) \right)^{1/2} p(x).$$

Таким образом, минимум (II) достигается при $q(x) = q_0(x)$ и равен

$$\tilde{I}^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 I_i^2.$$

Полученный результат важен, когда моделирование каждой из плотностей, близких к $|f_i| p^{-1}$, - достаточно трудоемкая задача, и целесообразно ограничиться оптимальным выбором одной плотности, "средней" между оптимальными плотностями.

Пример 2. Вычислить приближенно интеграл

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx.$$

Точное значение этого интеграла равно 1.

Используем для вычисления три различные случайные величины ξ :

- 1) с постоянной плотностью $p(x) = 2/\pi$ (т.е. ξ равномерно распределена в интервале $(0, \pi/2)$);
- 2) с линейной плотностью $p(x) = 8x/\pi^2$;
- 3) с плотностью $p(x) = 24x^2/\pi^3$.

I. Пусть $p(x) = 2/\pi$ (см. § I., Упражнение 7)

Чтобы разыгрывать значения ξ , составим уравнение

$$\int_0^{\xi} \frac{2}{\pi} dx = \alpha \quad (\text{здесь } a=0, b=\pi/2)$$

Отсюда $\xi = (\frac{\pi}{2}) \cdot \alpha$. Следовательно

$$I \approx \frac{\pi}{2N} \sum_{i=1}^N \sin \xi_i. \quad (I3)$$

2. Пусть $p(x) = 8x/\pi^2$. Для разыгрывания ξ используем уравнение

$$\int_0^{\xi} \frac{8x}{\pi^2} dx = \alpha.$$

Отсюда после несложных вычислений получим

$$\xi = (\pi/2) \sqrt{\alpha}. \quad \text{Следовательно}$$

$$I \approx \frac{\pi^2}{8N} \sum_{i=1}^N \frac{\sin \xi_i}{\xi_i}. \quad (I4)$$

3. Пусть теперь $p(x) = 24x^2/\pi^3$. ξ находим из уравнения

$$\int_0^{\xi} \frac{24x^2}{\pi^3} dx = \alpha.$$

Отсюда

$$\xi = \frac{\pi}{2} \sqrt[3]{\alpha}.$$

Следовательно

$$I \approx \frac{\pi^3}{24N} \sum_{i=1}^N \frac{\sin \xi_i}{\xi_i^2}. \quad (I5)$$

Замечания.

I. Для вычисления интеграла $I = \int_a^b f(x) dx$ мы выбрали произвольную плотность распределения $p(x)$, определенную на интервале (a, b) . Наряду со случайной величиной ξ , определенной в интервале (a, b) с плотностью $p(x)$, мы построили случайную величину

$$\eta = f(\xi)/p(\xi).$$

$\mathcal{X}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(y_i) \frac{p(y_i)}{q(y_i)}$, где y_i независимы и распределены с плотностью $q(y)$. Оценки $\mathcal{X}_N^1 = \mathcal{X}_N^2(q)$ образуют семейство несмещенных оценок интеграла I , и можно поставить задачу о выборе оптимальной плотности $q = q_0$, при которой дисперсия минимальна. Заметим, что $\mathcal{X}_N^2(q)$ может иметь при некоторых q и бесконечную дисперсию. Если конечен интеграл $\int |f(x)| p(x) dx$, то существует такая плотность q , при которой дисперсия $\mathcal{X}_N^2(q)$ обязательно конечна.

Теорема I. Минимальная дисперсия реализуется для плотности q_0 , пропорциональной $|f(x)| p(x)$, и выражается равенством

$$D\mathcal{X}_N^2(q_0) = \frac{1}{N} \left(\left(\int |f(x)| p(x) dx \right)^2 - I^2 \right). \quad (I0)$$

Доказательство. Если q_0 пропорциональна $|f(x)| p(x)$, то

$$q_0(x) = \frac{|f(x)| p(x)}{\int |f(x)| p(x) dx},$$

$$D\mathcal{X}_N^2(q_0) = \frac{1}{N} \left(\int \frac{f^2(x) p^2(x)}{|f(x)| p(x)} dx - I^2 \right).$$

Отсюда следует (I0) и конечность дисперсии, если конечен интеграл $\int |f(x)| p(x) dx$. Оптимальность же плотности q_0 следует из того, что для любой $q(x) > 0$ величина $\int f^2(x) p^2(x) / q(x) dx$ больше или равна $(\int |f(x)| p(x) dx)^2$, ибо их разность есть дисперсия случайной величины $|f(\xi)| p(\xi) / q(\xi)$, где ξ распределена с плотностью $q(x)$, а дисперсия - величина неотрицательная.

1) Применение к оцениванию несобственных интегралов.

Пример I. Пусть мы хотим оценить интеграл $I = \int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx$, где $g(x)$ - непрерывная на $[0, 1]$ функция такая,

что $g(0) \neq 0$. Оценка $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(\alpha_i)}{\sqrt{\alpha_i}}$, где α_i независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$, имеет, как легко подсчитать, бесконечную дисперсию. Если же "включить особенность в плотность" и оценивать I с помощью суммы $\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N g(\xi_i)$, где ξ_i распределены с плотностью $\frac{1}{2\sqrt{y}}$, то дисперсия оценки оказывается конечной.

2) Выбор оптимальной плотности при оценке нескольких интегралов. Пусть требуется вычислить n интегралов $I_i = \int f_i(x) p(x) dx$. Выбирается некоторая плотность вероятностей $q(x)$, и интегралы I_i оцениваются с помощью средних

$$\mathcal{X}^{(i)}(q) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_i(\xi_j) \frac{p(\xi_j)}{q(\xi_j)}.$$

Зададимся вещественными константами a_i ($i=1, \dots, n$) и подберем плотность $q(x)$ так, чтобы обратить в минимум сумму

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 D\mathcal{X}^{(i)}(q) = \int \sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2(x) \frac{p^2(x)}{q(x)} dx - \sum_{i=1}^n a_i^2 I_i^2. \quad (II)$$

Ее минимум достигается, когда достигается минимум выражения

$$S = \int \sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2(x) \frac{p^2(x)}{q(x)} dx.$$

Если обозначить $\eta = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2(\xi) \right)^{1/2} \frac{p(\xi)}{q(\xi)}$, то

$$D\eta = S - \tilde{I}^2 \geq 0,$$

где $\tilde{I} = \int \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2 \right)^{1/2} p(x) dx$, то есть

$$S \geq \left(\int \sum_{i=1}^n a_i^2 f_i^2 \right)^{1/2} p(x) dx. \quad (I2)$$

был минимальным.

Способ оценивания интеграла $\int f(x) dF(x)$ при помощи среднего арифметического $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$, где

x_i - независимые реализации случайной величины, имеющей функцию распределения F , обладает следующими особенностями и преимуществами по сравнению с классическими методами интегрирования.

1) Естественным образом строится алгоритм интегрирования, если имеется алгоритм моделирования случайной величины, распределенной по закону $F(x)$.

2) Порядок убывания остатка

$$\int f(x) dF(x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (8)$$

не зависит от размерности S . Если $f(x)$ - фиксированная функция, для которой существует и конечен интеграл

$\int f^2(x) dF(x)$ ($f \in L_2(F)$), то остаток (8) убывает как $N^{-1/2}$ при фиксированном доверительном уровне γ .

Вероятностный характер сходимости отличает метод Монте-Карло от классических процедур интегрирования. Такой же порядок убывания остатка, впрочем, имеет место для любой f из класса функций F , если $f \in L_2(F)$. Характер класса F при $f \in L_2(F)$ может отразиться лишь на скорости сходимости распределения среднего $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$ к нормальному закону. Если $L_2(F) \subset F$, то остаток убывает, вообще говоря, медленнее, чем $N^{-1/2}$, и предельное распределение среднего арифметического отлично от нормального.

3) Последовательный характер оценивания интеграла. При увеличении N естественным образом используется вычисленные ранее значения функции. Детерминированные квадратурные формулы далеко не всегда обладают таким свойством.

4) Простая процедура оценки погрешности параллельно с основными вычислениями. Так, если сходимость распределения среднего арифметического к нормальному закону имеет порядок

$O(N^{-1/2})$, то вычисляя среднее арифметическое квадра-

тов значений функций в точках x_i , мы можем оценить дисперсию среднего арифметического и построить доверительный интервал, соответствующий заданному уровню доверия.

Практически оценка погрешности детерминированных квадратурных формул, когда вид f достаточно сложен, в подавляющем большинстве случаев оказывается безнадежно трудной задачей, ибо требует оценки супремума производных функции. Даже определение класса дифференцируемых функций, к которому принадлежит f , дело далеко не простое. Использование метода Монте-Карло, строго говоря, требует также сведений о принадлежности f к определенному классу функций. Желательно, чтобы интеграл $\int |f^3(x)| dF(x)$ имел конечное значение, что обеспечивает асимптотическую нормальность распределения среднего арифметического и достаточную для практических целей точность оценки дисперсии. Требование конечности третьего момента, однако, менее ограничительно, чем ограниченность производных, и может контролироваться в процессе вычислений.

Как отметили, что асимптотическая скорость убывания погрешности равна $\sqrt{D\zeta/N}$, где ζ - несмещенная оценка интеграла. Очевидно, что ζ нужно строить так, чтобы $D\zeta$ было по возможности малой величиной и чтобы моделирование реализаций ζ не было настолько сложным.

Метод существенной выборки (выборка по важности)

Пусть $I = \int f(x) p(x) dx$, где $p(x)$ - плотность. Если $q(x)$ - плотность такая, что $q(x) > 0$ для тех x для которых $p(x) > 0$, то очевидно, что

$$I = \int f(x) \frac{p(x)}{q(x)} \cdot q(x) dx \quad (9)$$

Отсюда следует, что наряду с суммой $x_N^1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$, где x_i - независимые реализации случайной величины, имеющей плотность $p(x)$, интеграл можно оценить суммой

По совместной плотности φ и ψ вычислим плотности этих величин:

$$P_1(\varphi) = \int_0^{2\pi} p(\varphi, \psi) d\psi = \frac{1}{2} \sin \varphi,$$

$$P_2(\psi) = \int_0^{\pi} p(\varphi, \psi) d\varphi = \frac{1}{2\pi}.$$

Равенство $p(\varphi, \psi) = P_1(\varphi)P_2(\psi)$ показывает, что φ и ψ независимы. Очевидно, ψ равномерно распределена в интервале $(0, 2\pi)$, и формула для разыгрывания запишется в виде

$$\psi = 2\pi\alpha, \quad \alpha \in [0, 1) \quad (*)$$

Формулу для разыгрывания φ получим методом обратных функций

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} P_1(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) = 1 - \alpha,$$

откуда $\cos \varphi = 2\alpha - 1$ (**)

Формулы (*), (**) позволяют выбирать (разыгрывать) случайное направление. Здесь значения α в этих формулах должны быть независимы.

§ 2. Вычисление определенного интеграла

Как отмечалось во Введении, одной из основных задач метода Монте-Карло является оценивание математического ожидания случайной величины. Известно, что математическое ожидание случайной величины можно представить в виде интеграла Лебега-Стилтьеса по соответствующей вероятностной мере. Будем считать, что вероятностная мера задается в виде обобщенной плотности и соответствующие интегралы по гиперповерхностям, на которых мера сосредоточена, понимаются в смысле Римана. Таким образом, если $F(x)$ - функция распределения, зада-

ваемая обобщенной плотностью, то математическое ожидание случайной величины $f(\xi)$, где ξ имеет функцию распределения $F(x)$, может быть представлено в виде

$$Mf(\xi) = \int f(x) dF(x). \quad (3)$$

Классическая теория приближенного интегрирования рассматривает, по существу, частный случай, когда плотность задана в некоторой области Ω S -мерного евклидова пространства. В этом случае речь идет о вычислении интеграла

$$\int_{\Omega} f(x) p(x) dx, \quad p(x) > 0. \quad (4)$$

Этот интеграл вычисляется обычно с помощью квадратурных сумм вида

$$K_n[f] = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i), \quad (5)$$

где A_i - постоянные, которые не зависят от $f, x_i \in \Omega$ ($i=1, \dots, n$).

Приближенная формула

$$\int_{\Omega} f(x) p(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (6)$$

носит название квадратурной (при $S > 1$ часто кубатурной) формулы. Постоянные A_i называют коэффициентами, а x_i - узлами этой формулы. Основная задача теории квадратурных формул состоит в выборе коэффициентов и узлов формулы так, чтобы она имела возможно большую точность, т.е. чтобы модуль остатка $R_n[f]$ формулы

$$R_n[f] = \int_{\Omega} f(x) p(x) dx - \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (7)$$

рованную ось, например, ось X . Единичный вектор, исходящий из начала координат, будем определять следующими двумя величинами: μ - косинус угла между вектором и осью X , φ - угол между плоскостью "вектор-ось X " и некоторой фиксированной плоскостью, проходящей через ось X . Очевидно, что для изотропного вектора угол φ распределен равномерно в интервале $(0, 2\pi)$, а распределение μ симметрично относительно точки $\mu = 0$. Далее для $x \geq 0$ имеем

$$P(x \leq \mu \leq x + dx) = c \cdot dx,$$

где $c = \text{const}$, так как площадь сферического пояса пропорциональна его высоте. Следовательно, величина μ распределена равномерно в интервале $(-1, 1]$.

Таким образом, изотропный вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ можно моделировать по формулам

$$\omega_1 = 1 - 2\alpha_1, \quad \omega_2 = \sqrt{1 - \omega_1^2} \cdot \cos 2\pi\alpha_2,$$

$$\omega_3 = \sqrt{1 - \omega_1^2} \cdot \sin 2\pi\alpha_3.$$

Более экономичным является следующий алгоритм:

- 1) $\omega_1 = 1 - 2\alpha$;
- 2) $\gamma_1 = 1 - 2\alpha_1$, $\gamma_2 = 1 - 2\alpha_2$, $D = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$;
- 3) если $D > 1$, то повторяется 2) и так далее, иначе

$$\omega_2 = \gamma_1 \cdot \sqrt{\frac{1 - \omega_1^2}{D}}, \quad \omega_3 = \gamma_2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \omega_1^2}{D}}$$

Моделирование случайных векторов.

Для плотности $f(x_1, \dots, x_n)$ распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ справедливо представление

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2|x_1) f_3(x_3|x_1, x_2) \dots$$

$$f_n(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

где $f_1(x_1)$ - плотность абсолютного (маргинального) распределения ξ_1 , $f_k(x_k|x_1, \dots, x_{k-1})$ - плотность условного распределения ξ_k при условии

$$\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_{k-1} = x_{k-1}.$$

Справедливо обратное соотношение. Для моделирования случайного вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) достаточно моделировать ξ_1 соответственно $f_1(x_1)$, а ξ_k - соответственно $f_k(x_k|x_1, \dots, x_{k-1})$ ($k=2, \dots, n$). Такой метод называется стандартным методом моделирования случайных векторов.

Выбор случайного направления в пространстве.

Условимся задавать направление единичным вектором, выходящим из начала координат. Концы таких векторов расположены на поверхности единичной сферы. Слова "любое направление одинаково вероятно" означают, что конец вектора представляет собой случайную точку Ω , равномерно распределенную на поверхности этой сферы: вероятность того, что Ω окажется в любом элементе поверхности dS , равна $dS/(4\pi)$ (т.к. радиус сферы $R \equiv 1$).

Выберем на поверхности сферы сферические координаты (φ, ψ) с полярной осью Ox .

$$\text{Тогда } dS = \sin \varphi d\varphi d\psi$$

причем $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \psi < 2\pi$

Обозначим через $P(\varphi, \psi)$ плотность случайной точки (φ, ψ) . Из требования

$$P(\varphi, \psi) d\varphi d\psi = dS/(4\pi).$$

Из предыдущего равенства вытекает, что

$$P(\varphi, \psi) = \sin \varphi / (4\pi).$$

Отсюда $\varphi(\alpha) = F_2^{-1}(\alpha)$.

С другой стороны,

$$P(F^{-1}(\alpha) < x) = P(\alpha < F(x)) = F(x).$$

Следовательно, в предположении монотонного возрастания $\varphi(\alpha)$ мы получаем единственную моделирующую формулу

$$\xi = F^{-1}(\alpha), \quad (2)$$

которая представляет собой стандартный метод моделирования непрерывной случайной величины.

Предположим теперь, что φ монотонно убывает и $\eta = \varphi(\alpha)$. Тогда

$$F_2(x) = P(\varphi(\alpha) < x) = P(\alpha > \varphi^{-1}(x)) = 1 - \varphi^{-1}(x)$$

и $\varphi(\alpha) = F_2^{-1}(1 - \alpha)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} P(F^{-1}(1 - \alpha) < x) &= P(1 - \alpha < F(x)) = \\ &= P(\alpha > 1 - F(x)) = F(x). \end{aligned}$$

Таким образом, в случае монотонного убывания φ имеется также единственная моделирующая формула

$$\xi = F^{-1}(1 - \alpha),$$

которая по существу эквивалентна (2), так как случайные величины $1 - \alpha$ и α одинаково распределены.

Упражнение.

5. Длина свободного пробега нейтрона в однородном веществе распределена с плотностью $f(x) = \delta \cdot e^{-\delta x}$, ($x > 0$). Найдите $F(x)$ и ξ .

6. Простейший поток (или поток Пуассона) называется такой поток заявок, когда промежуток времени ξ между двумя последовательными заявками есть случайная величина, распределенная в интервале $(0, \infty)$ с плотностью

$$f(x) = a \cdot e^{-ax}$$

Этот закон распределения называют также экспоненциальным распределением.

Найти ξ .

7. Случайная величина ξ называется равномерно распределенной в интервале (a, b) , если ее плотность постоянна в этом интервале:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b.$$

Найти ξ .

Многомерный изотропный вектор и алгоритм моделирования изотропного вектора w .

Определение. Случайный вектор $w = (w_1, \dots, w_n)$ называется изотропным, если точка $w/|w|$ распределена равномерно по поверхности сферы $|w| = 1$ и не зависит от $|w|$. Наиболее простым является следующий алгоритм:

- 1) $\gamma_1 = 1 - 2\alpha_1, \dots, \gamma_n = 1 - 2\alpha_n, d^2 = \sum_{k=1}^n \gamma_k^2$;
- 2) если $d^2 > 1$, то повторяем 1) и так далее, иначе

$$w_1 = \gamma_1/d, \dots, w_n = \gamma_n/d.$$

Алгоритм состоит в том, что точка $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ выбирается равномерно по объему куба $-1 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1$ и те точки, которые не попали в шар единичного радиуса, исключаются. Вероятность P положительного исхода равна отношению объемов указанных шара и куба; в случае $n = 2m$ она выражается формулой

$$P = \frac{\pi^m}{m! 2^m} = \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \cdot 2^{-m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Смысл алгоритма очевиден: вектор, конец которого есть точка, распределенная равномерно в шаре, является изотропным.

Моделирование изотропного направления в трехмерном пространстве. Рассмотрим в таком пространстве некоторую фикси-

$$P\{\xi(t_2) < x | \xi(t), t < t_1\} = P\{\xi(t_2) < x | \xi(t_1)\}$$

Марковский случайный процесс может быть задан переходными вероятностями и начальным распределением вероятностей. В этом случае предполагается, что Θ имеет минимальный элемент θ_0 , при котором заданы начальное распределение вероятностей P_0 случайной величины $\xi(\theta_0)$ и функция (переходная вероятность) $P(\omega, t; \nu, \theta)$ ($\omega, \omega' \in \Omega$; $t, \theta \in \Theta$; $\nu \in \mathcal{U}$), удовлетворяющая для почти всех равенству

$$P(\omega, t; \nu, \theta) = \int P(\omega', \tau; \nu, \theta) P(\omega, t; d\omega', \tau)$$

(уравнение Чепмена-Колмогорова). Последнее обеспечивает выполнение условий согласованности конечномерных распределений процесса.

Важным частным случаем марковского процесса является марковская цепь с конечным числом состояний m . В этом случае функция $\xi(\theta, \omega)$ может принимать лишь конечное число m значений. Цепь в стационарном случае при $\theta = \theta_0$ определяется дискретным начальным распределением. Роль переходной вероятности играет переходная (стохастическая) матрица $P = \{P_{ij}\}_{i,j=1}^m$, элементы которой удовлетворяют условиям $P_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^m P_{ij} = 1$.

§ I. Моделирование некоторых случайных величин и векторов

Для решения задач методом Монте-Карло необходимо получать на ЭВМ последовательность выборочных значений случайной величины с заданным распределением. Такой процесс называется моделированием случайной величины. Случайные величины обычно моделируют с помощью преобразований одного или нескольких независимых значений случайной величины α , равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$.

Стандартный метод моделирования дискретной случайной величины основан на следующем соотношении:

$$P\left(\sum_{k=0}^{m-1} P_k \leq \alpha < \sum_{k=0}^m P_k\right) = P_m, \quad (I)$$

где $P_m = P(\xi = x_m)$, $m = 0, 1, \dots$.

Наиболее важными дискретными случайными величинами являются целочисленные с распределением:

$P_k = P(\xi = k)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) связанным простыми рекуррентными формулами:

$$P_{k+1} = P_k \cdot r(k).$$

Упражнение. Найти рекуррентную формулу:

1. Для биномиального распределения с параметрами p, n ;
 $P_k = P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.
2. Для распределения Пуассона с параметром λ ;

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

3. Для геометрического распределения с параметром p ;

$$P_k = p \cdot (1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

4. Для гипергеометрического распределения;

$$P_k = \frac{C_{n_1}^k \cdot C_{n-n_1}^{l-k}}{C_n^l},$$

$$\max(0, n_1 + l - n) \leq k \leq \min(n_1, l).$$

Стандартный метод моделирования непрерывной случайной величины связан с формулой вида $\xi = \varphi(\alpha)$, где $\varphi(y)$ — строго монотонная и непрерывная функция на интервале $(0, 1)$; для ξ задана плотность распределения $f(x)$ ($a < x < b$, границы a, b могут быть и бесконечными).

Предположим, что $\varphi(x)$ монотонно возрастает, и найдем функцию распределения для $\eta = \varphi(\alpha)$:

$$F_\eta(x) = \int_a^x f_\eta(t) dt = P(\varphi(\alpha) < x) = P(\alpha < \varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(x).$$

Для каждой случайной величины $\xi(\omega)$ однозначно определяется функция распределения

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\},$$

представляющая собой монотонно неубывающую, неотрицательную непрерывную слева функцию такую, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1.$$

Если $R = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ - совокупность случайных величин, определенных на (Ω, \mathcal{U}, P) , то есть векторная случайная величина, то функция $F_R(x_1, \dots, x_s) = P(\bigwedge_{i=1}^s \{\omega: \xi_i(\omega) < x_i\})$ называется совместной функцией распределения величин ξ_1, \dots, ξ_s или функцией распределения векторной случайной величины R . Она однозначно определена в S - мерном евклидовом пространстве, монотонно не убывает и непрерывна слева по каждой из переменных. Кроме того

$$\lim_{\substack{x_k \rightarrow -\infty \\ 1 \leq k \leq s}} F_R(x_1, \dots, x_s) = 0$$

и

$$\lim_{x_{i+1}, \dots, x_s \rightarrow \infty} F_R(x_1, \dots, x_i, \dots, x_s) = F_{R_i}(x_1, \dots, x_i),$$

где $R_i = (\xi_1, \dots, \xi_i)$,

так что $F_{R_i}(x_1, \dots, x_i)$ представляет собой функции распределения векторной случайной величины R_i .

Если имеет смысл интеграл

$$\int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\xi}(x),$$

то его называют математическим ожиданием случайной величины ξ и обозначают $M\xi$. Если μ - конечная мера, абсолютно непрерывная по отношению к вероятностной мере P , то производную Радона-Никоидима $dP/d\mu(\omega)$ называют плотностью распределения P по отношению к мере μ . В частности, если μ - мера Лебега и почти всюду существует обычная производная $dF_{\xi}(x)/dx = p_{\xi}(x)$,

то ее называют плотностью распределения или плотностью вероятности случайной величины ξ . Для многомерной случайной величины плотность совместного распределения определяется равенством

$$P_R(x_1, \dots, x_s) = \frac{\partial^s F_R(x_1, \dots, x_s)}{\partial x_1 \dots \partial x_s}$$

для почти всех x_1, \dots, x_s .

IV. Случайные процессы.

Понятие случайного процесса является непосредственным обобщением понятия случайной величины. Пусть θ - некоторый параметр, принимающий значения из множества Θ . Функция $\xi(\theta, \omega)$, определенная на Θ как функция θ и на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{U}, P) как функция ω такая, что при каждом фиксированном значении θ из Θ $\xi(\theta, \omega)$ является случайной величиной, называется случайным процессом. Обычно предполагается, что Θ есть множество вещественной прямой. Если Θ - множество более сложной природы, то $\xi(\theta, \omega)$ называют случайной функцией или случайным полем.

Функция параметра θ , равная при каждом фиксированном θ величине $M\xi(\theta, \omega)$, называется математическим ожиданием или средним значением случайного процесса.

Случайный процесс $\xi(\theta) = \xi(\theta, \omega)$ называется стационарным, если связанные с ним распределения вероятностей не зависят от сдвига параметра θ . Если все конечномерные распределения процесса нормальны, то процесс называется гуссовским случайным процессом.

Марковским случайным процессом называется процесс, для условных конечномерных распределений которого с вероятностью 1 выполняются равенства

$$P\{\xi(\theta_n) < x \mid \xi(\theta_1), \dots, \xi(\theta_{n-1})\} = P\{\xi(\theta_n) < x \mid \xi(\theta_{n-1})\}, (M)$$

для любых значений параметра $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n$ из Θ .

Условие (M) эквивалентно также следующему: для любых $t_1 < t_2$ из Θ и любого x с вероятностью 1

называют простой, если она принимает на Ω не более счетного числа различных значений.

Пусть A_i - последовательность непересекающихся множеств, на которых простая функция $\eta(\omega)$ имеет постоянные значения η_i . Можно показать, что эти множества измеримы. η_i называют интегрируемой, если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| P\{A_i\} \quad \text{сходится, и величину}$$

$$\int_{\Omega} \eta(\omega) P(d\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i P\{A_i\}$$

называют интегралом простой функции η по пространству Ω . Произвольную измеримую функцию $\xi(\omega)$ можно представить как предел сходящейся последовательности простых функций для всех ω , за исключением лишь, может быть, некоторого множества ω , имеющего меру нуль, т.е.

$$\xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega \pmod{P}).$$

Обозначение (\pmod{P}) будет употребляться, когда некоторое свойство выполняется для всех элементов некоторого множества, за исключением множества P -меры нуль, где P -вероятностная или \mathcal{B} -конечная мера. В этом случае говорят, что свойство выполняется для почти всех ω относительно меры P или выполняется с вероятностью 1, если P - вероятностная мера.

Интегрируемыми называют все измеримые функции $\xi(\omega)$, для которых конечна верхняя грань

$$\sup_{\eta} \int_{\Omega} |\eta(\omega)| P(d\omega)$$

по всем простым функциям η , для которых $|\eta| < |\xi|$. Интеграл $\int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$ определяется далее как предел интегралов от простых функций η_n таких, что $\eta_n(\omega)$ сходится для всех $(\pmod{P}) \omega$ к $\xi(\omega)$ и $|\eta_n| \leq |\xi|$. Интеграл по произвольному множеству A из \mathcal{U} (неопре-

деленный интеграл) существует, если интегрируема функция $\xi \cdot \varphi_A$, где φ_A - индикатор множества A , т.е.

$$\varphi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases}$$

и

$$\int_A \xi(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} \xi(\omega) \varphi_A(\omega) P(d\omega).$$

Для определенного таким образом интеграла выполняются обычные свойства интеграла Лебега по конечному промежутку.

Если \mathcal{B} - конечная мера $\mu(A)$ ($A \in \mathcal{U}$) допускает представление в виде

$$\mu(A) = \int_A f(\omega) P(d\omega), \quad (*)$$

где f - неотрицательная интегрируемая функция, то $f(\omega)$ называют производной Радона-Никодима меры μ по мере P и употребляют обозначение

$$f(\omega) = \frac{d\mu}{dP}(\omega). \quad (**)$$

Согласно теореме Радона-Никодима для заданных \mathcal{B} - конечных мер μ и P производная $f(\omega)$ существует, т.е. имеет место представление $(*)$, в том и только в том случае, если μ абсолютно непрерывна по отношению к P ($\mu \ll P$), т.е. из равенства $P(A) = 0, A \in \mathcal{U}$, следует $\mu(A) = 0$.

III. Случайные величины и функции распределения.

Пусть (Ω, \mathcal{U}, P) - вероятностное пространство. Множества A из \mathcal{U} называют событиями, а величины $P(A)$ их вероятностями.

Случайной величиной, определенной на этом пространстве, называется произвольная \mathcal{U} - измеримая вещественная функция $\xi(\omega)$, принимающая конечные (\pmod{P}) значения. Случайные величины, отличающиеся на множестве P -меры нуль, считаются равными.

$$P(|S_N/N - a| > \varepsilon) \leq \sigma^2 / (N\varepsilon^2).$$

Отсюда, если мы зададим некоторое достаточно малое γ и положим $\gamma = \sigma^2 / (N\varepsilon^2)$ (т.е. $\varepsilon = \sigma / \sqrt{N\gamma}$), то получим

$$P\left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i - M\xi \right| < \frac{\sigma}{(N\gamma)^{1/2}} \right\} > 1 - \gamma,$$

то есть с вероятностью $1 - \gamma$ среднее арифметическое независимых реализаций ξ отличается от $M\xi$ не более чем на $\sigma / \sqrt{N\gamma}$. При фиксированных γ и σ погрешность убывает, таким образом, как $(N)^{-1/2}$.

Если для оценки погрешности используется центральная предельная теорема, то при достаточно большом N величину $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i$ можно считать распределенной нормально со средним $M\xi$ и дисперсией σ^2/N , что дает возможность построить доверительный интервал и оценить погрешность. При этом необходимо, чтобы распределение величины $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i$ отличалось от нормального не более чем на величину порядка $N^{-1/2}$. Величина дисперсии, которой определяется погрешность, может быть также оценена в процессе вычислений. Таким образом, имеется возможность определить в процессе вычислений число N , гарантирующее необходимую точность с заданной вероятностью. Эта особенность метода представляется весьма важной в практическом отношении. Эта задача связана с задачей оценки параметров нормального распределения. При этом оценка математического ожидания дает решение задачи, а оценка дисперсии обеспечивает оценку погрешности. Преобразования, сохраняющие математическое ожидание случайной величины, но изменяющие (уменьшающие) ее дисперсию, будем называть модификациями метода Монте-Карло.

Следующие задачи: вычислить математическое ожидание случайной величины при условии, что ее второй момент бесконечен; оценить математическое ожидание зависимых случайных величин; и другие нами здесь не будут рассмотрены. Сходимость метода Монте-Карло является сходимостью по

вероятности.

Цепи Маркова и связанные с ними алгоритмы

Мы ниже дадим некоторые основные понятия теории вероятностей.

I. Вероятностное пространство. Вероятностное пространство обычно задается в виде (Ω, \mathcal{U}, P) , где:

1) Ω - некоторое заданное множество, называемое пространством элементарных исходов; его элементы называют также точками.

2) \mathcal{U} - непустое множество подмножеств Ω , являющееся σ -алгеброй, то есть замкнутым относительно операции суммирования (объединения) счетного числа своих элементов, счетного пересечения и дополнения множеством; предполагается, что Ω (и \emptyset) является элементом \mathcal{U} ;

3) P - вероятностная мера, то есть неотрицательная функция множеств из \mathcal{U} такая, что $P(\Omega) = 1$ и $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, где A_i - последовательность попарно непересекающихся множеств из \mathcal{U} . Кроме вероятностной меры, часто полезно рассматривать конечную меру $\bar{\mu}$, отличающуюся от вероятностной лишь нормировкой $\bar{\mu}(\Omega) = \text{const} < \infty$, и μ - конечную меру μ для которой $\mu(\Omega)$ может иметь бесконечное значение, но все пространство Ω допускает представление в виде суммы счетного числа множеств A_i обладающих конечной мерой ($\mu(A_i) < +\infty, i=1,2,\dots$)

II. Измеримые функции, интеграл, производная.

Введение меры на σ -алгебре \mathcal{U} позволяет сразу же определить интеграл на пространстве Ω от измеримой вещественной функции по схеме, вполне аналогичной схеме определения интеграла Лебега.

Функцию $\xi(\omega), (\omega \in \Omega)$ называют \mathcal{U} -измеримой, если множество $\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ принадлежит \mathcal{U} для любого вещественного числа x . Измеримую функцию

Составитель: Шакенов К.К. Методы Монте-Карло и их приложение. Методическая разработка. - Алматы: изд.КазГУ, 1993, с.49.

Рецензент: Аканбаев Н.Е.

С Казахский государственный
Национальный университет
им. аль-Фараби, 1993.

ВВЕДЕНИЕ

Суть метода Монте-Карло заключается в том, что моделируются некоторые случайные величины с известными законами распределения, и из этих величин по известным правилам конструируются существенно более сложные, распределение, которых уже не может быть найдено аналитически. Эти результирующие распределения могут быть известны с точностью до параметров - в этом случае используется аппарат математической статистики для оценивания этих параметров. В других случаях, когда вид результирующего распределения неизвестен, используются непараметрические методы. Отметим, что предельные теоремы теории вероятностей играют важную роль при разработке вычислительных схем метода Монте-Карло.

Задача метода Монте-Карло после получения ряда реализаций интересующей нас случайной величины ξ (с помощью более простой случайной величины α) заключается в получении некоторых сведений о ее распределении, т.е. является типичной задачей математической статистики. При этом наиболее распространенной вычислительной задачей является задача оценки среднего значения некоторой случайной величины, т.е. задача вычисления интеграла типа Лебега по некоторой (конструктивной) вероятностной мере.

Наиболее изучен случай, когда существует конечный второй момент случайной величины. Самая простая вычислительная схема при этом заключается в следующем. Вычисляется N независимых реализаций случайной величины, и ее математическое ожидание оценивается с помощью среднего арифметического этих реализаций. Основанием для этого может служить тот факт, что среди линейных несмещенных оценок среднее арифметическое имеет наименьшую дисперсию. Оценка погрешности может быть получена с помощью неравенства Чебышева и имеет вероятностный характер. Известно, что для независимых и одинаково распределенных случайных величин ξ_1, \dots, ξ_N и $M\xi_k = a < \infty$, $D\xi_k = \sigma^2 < \infty$ ($k=1, 2, \dots, N$) и для $S_N = \sum_{k=1}^N \xi_k$ неравенство Чебышева, любого $\epsilon > 0$ имеет вид:

$$P(|S_N/N - a| \leq \epsilon) \geq 1 - \sigma^2 / (N\epsilon^2) \quad \text{или}$$

КАЗАХСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. АЛЫ-ШАРАПА

МЕТОДЫ ЭКГ-КАРДИО И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
Методическая разработка

АЛМАТЫ, 1993

40 тенге

777 157 1965 Сенжол

777 22 390 14 - Култ

КАЗАХСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. АЛЬ-ФАРАБИ

МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

Методическая разработка

АЛМАТЫ, 1993

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы, изд. 2-е, допол., М.: "Наука", 1975.
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование, изд. 2-е, допол., М.: "Наука", 1982.
3. Соболев И.М. Метод Монте-Карло, изд. 4-е допол., переработ., М.: "Наука", 1985.
4. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: "Наука", 1973.
5. Бусленко Н.П., Голенико Д.И., Соболев И.М., Срагович В.Г., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). СМБ, М.: Физматгиз, 1962.
6. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация в цифровых машинах. М.: Физматгиз, 1961.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
§ 1. Моделирование некоторых случайных величин и векторов	10
§ 2. Вычисление определенного интеграла	16
§ 3. Цепи Маркова с конечным числом состояний и решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	24
§ 4. Решение интегральных уравнений	30
Приложение	46